

**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

**Fakulta stavební**

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

**Brno, 2018**

**Bc. Martin Múčka**



**VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ**

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

**FAKULTA STAVEBNÍ**

FACULTY OF CIVIL ENGINEERING

**ÚSTAV STAVEBNÍ MECHANIKY**

INSTITUTE OF STRUCTURAL MECHANICS

**SIMULACE IDIOFONICKÉHO NÁSTROJE**

SIMULATION OF IDIOFONIC SYSTEM

**DIPLOMOVÁ PRÁCE**

DIPLOMA THESIS

**AUTOR PRÁCE**

AUTHOR

**Bc. Martin Múčka**

**VEDOUCÍ PRÁCE**

SUPERVISOR

**doc. Ing. PETR FRANTÍK, Ph.D.**

**BRNO 2018**





# VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

## FAKULTA STAVEBNÍ

Studijní program	N3607 Stavební inženýrství
Typ studijního programu	Navazující magisterský studijní program s prezenční formou studia
Studijní obor	3607T009 Konstrukce a dopravní stavby
Pracoviště	Ústav stavební mechaniky

## ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

Student	Bc. Martin Múčka
Název	Simulace idiofonického nástroje
Vedoucí práce	doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D.
Datum zadání	31. 3. 2017
Datum odevzdání	12. 1. 2018

V Brně dne 31. 3. 2017

---

prof. Ing. Drahomír Novák, DrSc.  
Vedoucí ústavu

---

prof. Ing. Rostislav Drochytka, CSc., MBA  
Děkan Fakulty stavební VUT



## **PODKLADY A LITERATURA**

Literatura dle pokynů vedoucího práce.

Macur, J., Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace, skripta, nakladatelství PC-DIR, Brno, 1995

Brepta, R., Půst, L., Turek, F.: Mechanické kmitání, Technický průvodce 71, nakladatelství Sobotáles, Praha, 1994.

## **ZÁSADY PRO VYPRACOVÁNÍ**

Nastudování potřebných znalostí dle pokynů vedoucího práce. Zorientování se v problematice. Vytvoření numerických modelů, jejich ověření a aplikace.

## **STRUKTURA DIPLOMOVÉ PRÁCE**

VŠKP vypracujte a rozčleňte podle dále uvedené struktury:

1. Textová část VŠKP zpracovaná podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (povinná součást VŠKP).
2. Přílohy textové části VŠKP zpracované podle Směrnice rektora "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací" a Směrnice děkana "Úprava, odevzdávání, zveřejňování a uchovávání vysokoškolských kvalifikačních prací na FAST VUT" (nepovinná součást VŠKP v případě, že přílohy nejsou součástí textové části VŠKP, ale textovou část doplňují).

---

doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D.  
Vedoucí diplomové práce

## ABSTRAKT

Práce se zabývá dynamickou simulací chování reálného zvonu v čase. Model je vytvořen podle principů fyzikální diskretizace jako pružinový v softwaru FyDiK3D. Aby mohl být model prohlášen za odpovídající skutečnosti, je třeba dokázat chování použitých struktur na elementárních úlohách mechaniky. Ukazuje se provázanost mezi tuhostí normálových a diagonálních pružin. Je popsáno, jak lze využít importovacích nástrojů softwaru při tvorbě modelu. Výsledný model se přibližuje svým chováním reálnému zvonu.

## KLÍČOVÁ SLOVA

zvon, fyzikální diskretizace, simulace, nelineární dynamické systémy, pružinový model, geometrická nelinearita, tuhost, FyDiK

## ABSTRACT

The thesis deals with dynamic simulation of real bell behavior over time. The model is created according to principles of physical discretization as a spring in the FyDiK3D software. In order for the model to be declared as relevant, it is necessary to prove the behavior of the structures used in the elementary tasks of the mechanics. It shows the correlation between the stiffness of normal and diagonal springs. Describes how to use software import tools to create a model. The resulting model approaches its real bell behavior.

## KEYWORDS

bell, physical discretization, simulation, nonlinear dynamic systems, spring model, geometrical non-linearity, stiffness, FyDiK

MÚČKA, Martin. *Simulace idiofonického nástroje*. Brno, Rok, 78 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta stavební, Ústav stavební mechaniky. Vedoucí práce: doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D.



## **Prohlášení**

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracoval(a) samostatně a že jsem uvedl(a) všechny použité informační zdroje.

Brno ..... ..

podpis autora(-ky)



## **Poděkování**

Rád bych na tomto místě poděkoval vedoucímu diplomové práce doc. Petrovi Frantíkovi za bezbřehé nasazení, nakažlivou motivaci, neutuchající ochotu i úctyhodnou erudici.

A také bych rád poděkoval mé rodině a blízkým, kteří s láskou akceptovali mnohá omezení a nikdy mě nepřestali podporovat.

Brno .....

.....

podpis autora(-ky)



# OBSAH

<b>Úvod</b>	<b>17</b>
<b>1 Zvon</b>	<b>19</b>
1.1 Názvosloví . . . . .	19
<b>2 Software FyDiK</b>	<b>21</b>
2.1 Elementární prvky použitého softwaru . . . . .	22
<b>3 Stanovení chování skořepiny</b>	<b>25</b>
3.1 Stěna a deska . . . . .	25
3.1.1 Stěna . . . . .	25
3.1.2 Deska . . . . .	27
3.2 Testovací úloha . . . . .	28
3.3 Určení stěnových parametrů pružinového modelu . . . . .	29
3.3.1 Typ A – symetrický s jednou diagonálou . . . . .	30
3.3.2 Typ B – nesymetrický s jednou diagonálou . . . . .	31
3.3.3 Typ C – symetrický se dvěma diagonálami . . . . .	33
3.3.4 Komplexní test a výběr nejlepšího typu . . . . .	34
3.4 Určení deskových parametrů pružinového modelu . . . . .	35
3.4.1 Ohyb . . . . .	35
3.4.2 Kroucení . . . . .	37
3.5 Nastavení parametrů modelu deskostěny . . . . .	39
<b>4 Reálný zvon</b>	<b>41</b>
<b>5 Virtuální model zvonu</b>	<b>47</b>
5.1 Nástroj Import z XML . . . . .	47
5.2 Zakřivená plocha zvonu . . . . .	47
5.3 Jařmo a příslušenství . . . . .	49
5.4 Srdce a problém kontaktu . . . . .	50
5.5 Ruční propojení objektů . . . . .	51
<b>6 Emulace zvuku a ověření numerického modelu</b>	<b>53</b>
6.1 Simulace . . . . .	53
6.1.1 Příklad A . . . . .	55
6.1.2 Příklad B . . . . .	57
6.1.3 Příklad C . . . . .	59
6.1.4 Příklad D . . . . .	61



6.2	Emulace zvuku . . . . .	62
6.3	Ověření hmotnosti . . . . .	64
6.4	Ověření periody kyvu . . . . .	64
<b>Závěr</b>		<b>65</b>
<b>Literatura</b>		<b>66</b>
<b>Seznam příloh</b>		<b>69</b>
<b>A</b>	<b>Srovnávací model v softwaru Scia</b>	<b>71</b>
A.1	Tah . . . . .	71
A.2	Smyk . . . . .	72
A.3	Ohyb . . . . .	74
A.4	Kroucení . . . . .	75
<b>B</b>	<b>Import rotační plochy</b>	<b>77</b>

# SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Názvosloví částí zvonu . . . . .	20
3.1	Zkoumané elementární typy namáhání . . . . .	25
3.2	Schéma působení zatížení na <i>stěnu</i> . . . . .	26
3.3	Schéma působení zatížení na <i>desku</i> . . . . .	28
3.4	Uspořádání smykových pružin . . . . .	29
3.5	Princip nahrazení tuhosti pro normálové pružiny . . . . .	30
3.6	Náhradní šířka smykové pružiny . . . . .	31
3.7	Graf závislosti $d_{sh}$ na poměru stran a $\nu$ pro typ B . . . . .	32
3.8	Projev nesymetrie uspořádání typu B . . . . .	33
3.9	Srovnání typů při poskritickém namáhání . . . . .	34
3.10	Schéma ohybu . . . . .	36
3.11	Příčný řez ohýbanou deskou . . . . .	37
3.12	Schéma kroucení . . . . .	38
4.1	Zkoumaný zvon z roku 1988 . . . . .	41
4.2	Vyšetřený tvar zvonu . . . . .	42
4.3	Detail připojení srdce ke zvonu . . . . .	43
4.4	Detail ložiska a pryžových tlumících bloků . . . . .	43
4.5	Schéma ověření hmotnosti . . . . .	44
4.6	Maximální výchylka zvonu a srdce . . . . .	44
4.7	Zjednodušená frekvenční analýza reálného zvonu . . . . .	45
5.1	Schéma tvarového zjednodušení modelu jářma . . . . .	49
5.2	Nahrazení objemu pružinami . . . . .	49
5.3	Diagram polygonální funkce kontaktu . . . . .	50
5.4	Výsledný virtuální model . . . . .	52
6.1	Schéma měřicího bodu pro emulaci zvuku . . . . .	62
6.2	Zjednodušená frekvenční analýza emulovaného zvuku . . . . .	63
A.1	Tah – zatížení a podpory . . . . .	71
A.2	Tah – výsledné deformace . . . . .	71
A.3	Tah – deformace konstrukce . . . . .	72
A.4	Smyk – zatížení a podpory . . . . .	72
A.5	Smyk – výsledné deformace . . . . .	73
A.6	Smyk – deformace konstrukce . . . . .	73
A.7	Ohyb – zatížení a podpory . . . . .	74
A.8	Ohyb – výsledné deformace . . . . .	74
A.9	Ohyb – deformace konstrukce . . . . .	75
A.10	Kroucení – zatížení a podpory . . . . .	75
A.11	Kroucení – výsledné deformace . . . . .	76

A.12 Kroucení – deformace konstrukce . . . . .	76
--	----

# SEZNAM TABULEK

3.1	Srovnání <i>typů</i> $A$ a $C$ při smyku . . . . .	33
3.2	Vyhodnocení tahu . . . . .	35
3.3	Vyhodnocení smyku . . . . .	35
3.4	Vyhodnocení ohybu . . . . .	37
3.5	Průměrování posunutí pro ohyb . . . . .	37
3.6	Vyhodnocení kroucení . . . . .	39
3.7	Shrnutí tuhostí pružin modelu deskostěny . . . . .	40
5.1	Nastavení typu struktury desky . . . . .	48
6.1	Porovnání zvukových frekvencí . . . . .	62
6.2	Ověření hmotnosti . . . . .	64
6.3	Ověření periody kyvu . . . . .	64



# ÚVOD

Již od pravěku lidstvo používalo hudební nástroje. Jedny z prvních byly ty, které byly rozeznívány bezprostředním úderem. Tyto patří mezi nástroje idiofonické<sup>1</sup>, které vytvářejí zvuk chvěním sebe sama, nikoliv chvěním struny, membrány nebo vzduchového sloupce. Tato skupina nástrojů se používá po celém světě ve všech kulturách. Mezi největší a nejznámější představitele patří zvony [1].

Předmětem této práce se stal jeden z těchto impozantních velikánů, jež visí ve věži kostela nanebevzetí Panny Marie ve Strážnici. Zvon sv. Cyril a Metoděj ulil v roce 1988 Josef Tkadlec a v roce 2015 prošel generální opravou zvonového příslušenství včetně výměny pohonu zvonu.

Zvon budí v lidech po staletí úctu svým vznešeným zvukem. Spolu s jednoduchým principem provozu vytváří velkou výzvu pro hlubší studium složitých dynamických jevů při procesu zvonění.

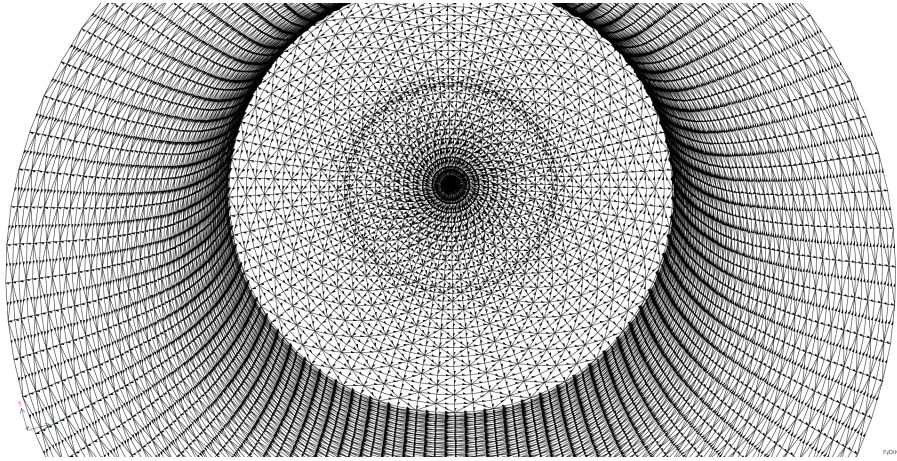
Tato práce si klade za cíl vytvořit virtuální model zvonu, který bude zachovávat mechanické a zejména dynamické charakteristiky zvonu skutečného. Autor práce provedl vlastní měření a sběr dat, aby tento cíl mohl být naplněn v maximální míře. Kapitola 4 blíže popisuje metodiku a zpracování měření.

Model zvonu byl vytvořen v softwaru FyDiK3D (dále jen FyDiK), jehož autorem je doc. Petr Frantík, Ph.D. Tento program je odlišný od běžně známějších softwarů na bázi metody konečných prvků jako je například Ansys, Scia Engineer apod. Jeho schopnosti v problematice simulování dynamických jevů jsou velmi silné. Blíže se popisu a vlastnostem tohoto softwaru věnuje kapitola 2.

Aby mohl být virtuální model prohlášen za odpovídající skutečnosti, je nutné potvrdit správnost chování elementárních modelů při jednoduchém namáhání. Správné určení tuhosti nejmenších prvků je klíčem k úspěšné analýze globálního modelu. Kapitola 3 se věnuje těmto elementárním důkazům a slouží mimo jiné jako návod pro správné určení tuhosti vkládané do programu FyDiK z reálných parametrů objektu.

---

<sup>1</sup>Česky samozvučné. Jedná se teda o tzv. idiofon. Slovo pochází z řeckého *idios* (tj. vlastní).



# 1 ZVON

Zvon představuje nevšední kovolitecké dílo, bývá zpravidla bohatě výtvarně zdobený a opatřený nápisy, čímž se podtrhne jeho výraznější zvuková stránka. Výtvarné ztvárnění reliéfů světců, rodových, obecních a městských znaků, ornamentů, letopočtů a nápisů na pláštích zvonů nám zpravidla přibližuje dobu jeho vzniku a kulturu daného období, ve kterém byl zvon vyroben [2].

Jedním z nejsložitějších idiofonů je právě zvon. Charakterizuje jej přesně specifikovaný tón, který vzniká jako primární, ale i sekundární projev úderu srdce. Po silném nárazovém tónu vznikají pro vnímavého posluchače další (tzv. alikvotní<sup>1</sup>) slyšitelné tóny, tercie, prima a spodní oktáva. Krásu a hudební projev zvonu ovlivňuje typ žebra, hmotnost zvonu a spodní oktáva, která dává zvuku zvonu mohutnost a sílu [2].

Zvony se vyrábí ze zvonařské bronzi v poměru 78 % mědi a 22 % cínu [2]. Přesná receptura stejně jako přesný tvar zvonu jsou však výrobním tajemstvím každého zvonaře. Je však známo, že další složky slitiny mají spíše negativní efekt na výsledný zvukový projev zvonu.

## 1.1 Názvosloví

Pro další práci se zvonem si objasníme názvosloví, které se běžně používá pro označování jednotlivých částí. Následující či podrobnější popis lze najít např. v [2], [4], [5] nebo [6]. Základní dvě části jsou *tělo* a *srdce*. Tělo lze dále dělit do čtyřech částí.

- *Věnc* je dolní část zvonu, do které bije srdce. Tloušťka věnce se podle úderů, kterým je vystavena, nazývá rána. Dolní část (zuzující se konec od věnce směrem dolů) se jmenuje *lem*.
- *Krk* je střední část těla zvonu mezi čepcem a věncem, hlavní plocha, na níž se uplatňuje nejvíce reliéfů a nápisů. Pro krk se velmi často užívá také název *plášť*, který má ještě vedlejší význam (hliněná forma pro odlití vnějšího profilu zvonu).
- *Čepec* je horní část těla zvonu, zpravidla lemovaná pásem nebo linkou. Horní ploše čepce se říká *příklop*, rozhraní mezi krkem a čepcem se nazývá *rameno*.
- *Koruna* slouží k upevnění zvonu na zvonové hlavě, proto se skládá z *uch*. Ucha bývají uspořádána různým způsobem podle záměru zvonaře. Základní uspořádání je kolem centrálního ucha, které se nazývá střední, kolem nějž je

---

<sup>1</sup> *Alikvotní tón* (nebo též *vyšší harmonický tón*, *částkový tón*) je tón, který zní společně s tónem základním. Většinou se u každého tónu (zvuku) vyskytuje řada alikvotních tónů. Intenzita jednotlivých alikvotních tónů je to, co určuje charakteristickou barvu zvuku. Díky alikvotním tónům jsme schopni např. poslechem rozpoznat, o jaký hudební nástroj se jedná [3]

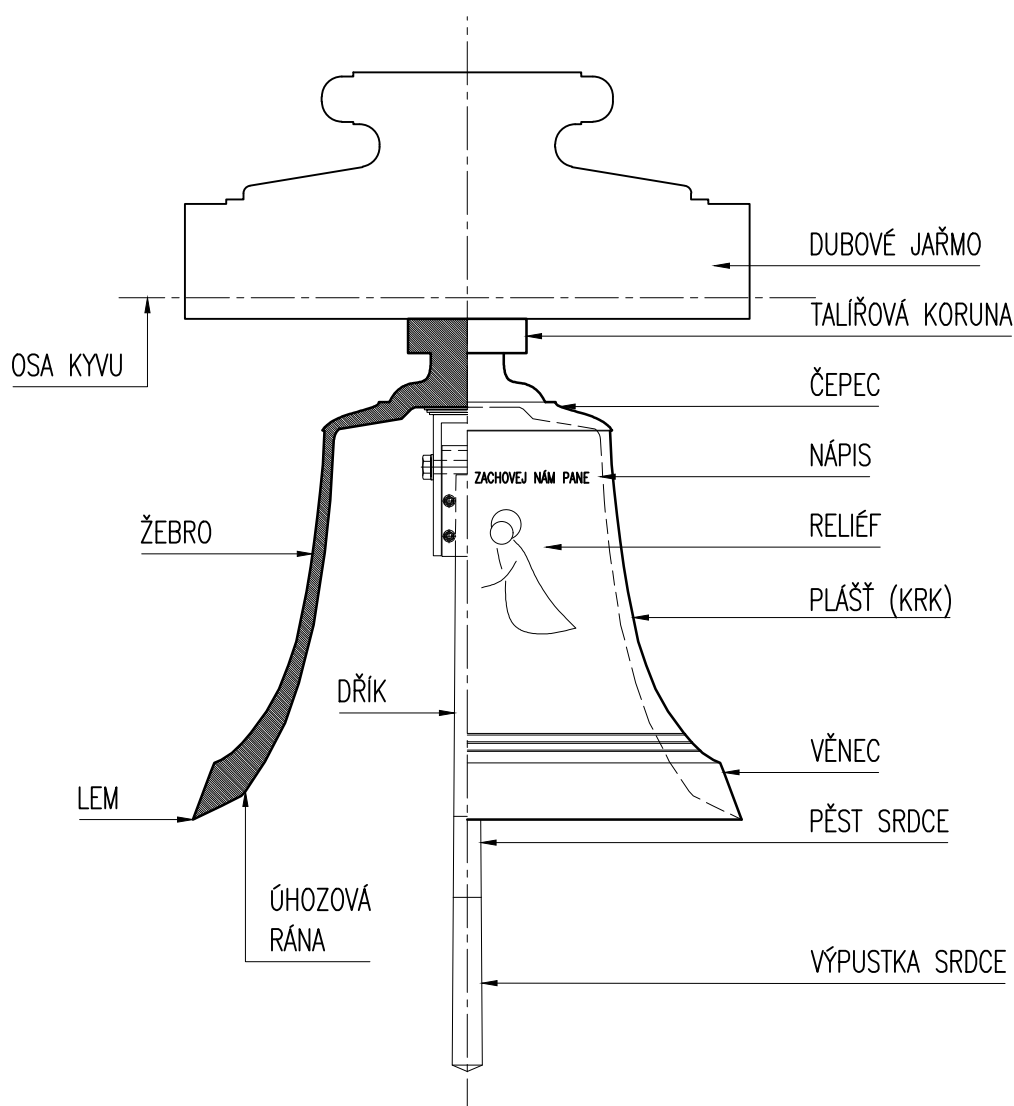


různý počet postranních uch. U nových zvonů se dnes někdy užívá jen jedno, ploché ucho, tzv. *talířová koruna*.

Ve zvonu je srdce zpravidla zavěšeno na *vnitřní ucho* koženým uchycením, které tlumí přenosy vibrací mezi tělem zvonu a jeho srdcem. To se dále dělí na čtyři části.

- *Oko* – slouží k zavěšení srdce.
- *Dřík* – dlouhá část srdce.
- *Pěst* – při zvonění bije do věnce a rozeznívá zvon.
- *Výpustka* – dolní zakončení srdce.

Celý zvon visí na dřevěném *jařmu* (též *závěsu* nebo *hlavě*) upevněn pomocí rozličného kování. Staletí prověřily nejvhodnější materiál závěsu, kterým je dub. Mezi přednosti tohoto materiálu patří především odolnost vůči přírodním vlivům a schopnost tlumit přenos vibrací do konstrukce zvonice.



Obr. 1.1: Obvyklé názvosloví částí zvonu

## 2 SOFTWARE FYDIK

Je známo, že děje a jevy vyskytující se v přírodě, lze popsat soustavou diferenciálních rovnic. Tyto tvoří základní kámen mnoha inženýrských výpočtů napříč obory. Bohužel analytické a přesné řešení těchto diferenciálních rovnic existuje spíše výjimečně, a to ještě za speciálních podmínek. Obecně se dá říci, že výsledky jakéhokoli zkoumaného děje ovlivňuje nepřeberné množství okolních vlivů, což považujeme za negativní vliv. Obyčejně se snažíme zkoumaný problém převést na lineární model zavedením některých zjednodušení. Tím se odstíní mnoho vlivů, které se složitě popisují, avšak výsledek ovlivňují v malé míře.

Pokud ovšem zjednodušení nestačí a model musí obsahovat nelineární závislosti, je třeba výkonnějších nástrojů. Hledáme tedy numerickou metodu, která dokáže zpracovat nelineární problém detailněji, i když třeba méně obecně. Aplikace numerických metod na problém vyžaduje diskretizaci, které může být dosaženo matematicky nebo fyzikálně.

Matematické pojetí diskretizace vyjadřuje aproximace parciálních derivací v diferenciálních rovnicích, což se může dít např. metodou konečných prvků (MKP). Je dokázáno, že zejména v případě nelineárního chování numerické řešení konverguje k analytickému s krokem metody zmenšujícím se k nule. Z tohoto důvodu není matematická diskretizace zcela vhodná pro řešení nelineárních modelů.

Fyzikální diskretizaci používáme tehdy, když rozdělíme spojitý model do množství diskrétních prvků, které mají stejné fyzikální vlastnosti. Následně aplikujeme tyto vlastnosti na prvky tak, aby diskrétní model nahradil spojitý jak jen je to možné. Dále použitím Newtonovské mechaniky na každý prvek modelu vyplyne soubor diferenčních rovnic<sup>1</sup>. Tímto se vyhneme rovnicím diferenciálním, které popisují pohyb spojitého modelu. Výběr dynamických diferenčních rovnic je podstatou fyzikální diskretizace, jak se píše např. v [9].

Výhodou této koncepce je možnost náhradní model skutečně vyrobit a ověřit přímo jeho vlastnosti a chování. Další výhodou je jednoduchost a průhlednost výpočtu stavu modelu, čímž odpadá potřeba použití složitého matematického a programového aparátu. Nevýhodou ovšem je nutnost obhájit uvažovaný náhradní model a zjevná makroskopická neshoda mezi modelem a modelovým problémem.

Software FyDiK3D<sup>2</sup> použitý pro tuto práci funguje na bázi fyzikální diskretizace, a to i v časové oblasti. Svým výkonem na jednotku vlastní velikosti mnohonásobně

---

<sup>1</sup>Diferenční rovnice vyjadřuje popis děje pomocí vazby mezi současným stavem (aktuální polohou, napjatostí, rychlostí apod.) v daném časovém kroku a stavem následujícím. Lze tedy popsat celý průběh děje pomocí výchozího počátečního stavu a vazbou mezi jednotlivými kroky výpočtu.

<sup>2</sup>Program je volně dostupný pod licencí freeware na adrese fydik.kitnarf.cz. Jeho autorem je doc. Ing. Petr Frantík, Ph.D.

předčí zavedené komerční softwary s dlouholetým vývojem. Program slouží k interaktivní simulaci disipativních nelineárních dynamických systémů [7]. Zejména přirozené zachování plné geometrické nelinearity je důležitý krok k přiblížení se reálnému chování zkoumaných problémů. Na následujících řádcích této kapitoly si ještě popíšeme jednotlivé elementární prvky, ze kterých je možno sestavit model zkoumaného problému.

## 2.1 Elementární prvky použitého softwaru

Jak již bylo popsáno, model sestává z prvků, jež složený v celek poskytují vlastnosti reálného objektu. Z podstaty této koncepce vyplývá aditivnost jednotlivých vlastností v komplexním modelu. Jinými slovy jsme schopni upravovat jednotlivé elementární vlastnosti modelu (normálová, smyková či ohybová tuhost apod.) téměř nezávisle na sobě. Gró celého systému tedy spočívá ve správném nastavení tuhostí těchto pružin. Pro lineární modelování lze použít konkrétních hodnot tuhostí  $k_{\text{rel}}$ <sup>3</sup>, nicméně software nabízí vytvoření vlastních tuhostních funkcí, které lépe popisují nelineární chování reálných materiálů, včetně kvazikřehkého.

Pro vysvětlení si uveďme ještě obecný vztah pro relativní tuhost  $k_{\text{rel}}$ , která se obvykle zadává do FyDiKu. Platí

$$k_{\text{abs}} = \frac{k_{\text{rel}}}{l_0}, \quad (2.1)$$

kde  $k_{\text{abs}}$  je tuhost spočítaná pro zkoumaný objekt a  $l_0$  je délka elementární pružiny.

**Hmotný bod** je klíčový prvek modelu. Jeho stav je určen souřadnicemi v prostoru  $x$ ,  $y$  a  $z$  a složkami rychlosti  $v_x$ ,  $v_y$  a  $v_z$ . Jelikož hmotný bod zprostředkovává spojení translačních pružin, lze jej chápat rovněž jako kloub. Protože je hmotný bod jediným nositelem hmotnosti, je také jediným příjemcem silových interakcí. Dále je hmotný bod tlumen silou

$$F_d = c_1 v_d + c_2 v_d |v_d| + c_3 v_d^3, \quad (2.2)$$

kde  $F_d$  je tlumící síla působící vždy proti směru pohybu,  $c_1$ ,  $c_2$  a  $c_3$  jsou zadávané koeficienty tlumení a  $v_d$  je vektor rychlosti pohybujícího se hmotného bodu.

**Translační pružina** tvoří základní spojení mezi hmotnými body. Pokud se vzdálenost mezi danými body změní vůči zadané hodnotě, vrací body zpět silou závislou na tuhosti pružiny, velikosti deformace a disipativní složky. Pružina se připojuje na

---

<sup>3</sup>Jedná se o tuhost relativní. Čili vztaženou na konkrétní délku části nenapjatého tělesa, kterou pružina nahrazuje. Nutno říci, že software umožňuje zadat tuhost absolutně.

hmotné body vždy kloubově a může být opatřena tlumením. Velikost síly  $F$  působící na hmotný bod lze vyjádřit následujícím vztahem

$$F = k_{\text{rel}} \cdot \frac{l - l_0}{l_0} + F_t, \quad (2.3)$$

kde  $l$  je aktuální délka pružiny,  $l_0$  je zadaná délka při uvolněném napětí a kde  $k_{\text{rel}}$  vyjadřuje tuhost pružiny.  $F_t$  je tlumící síla podle vztahu

$$F_t = c_1 v_t + c_2 v_t |v_t| + c_3 v_t^3, \quad (2.4)$$

kde  $c_1$ ,  $c_2$  a  $c_3$  jsou zadávané koeficienty tlumení a  $v_t$  je rychlost přibližování koncových hmotných bodů.

**Rotační pružina** spojuje dvě translační pružiny ve společném hmotném bodě. Vytváří tak tuhost ohybovou. Opět se zde vyskytuje tuhostní veličina, která může být konstatní nebo vyjádřená předpisem. Hodnotu momentu  $M$  vyjadřuje vztah

$$M = k_{\text{rel}} \cdot \frac{\varphi - \varphi_0}{l_0}, \quad (2.5)$$

kde  $\varphi$  znamená aktuální úhel v rovině příslušných translačních pružin,  $\varphi_0$  zadaný úhel a  $l_0$  příslušnou délku, na které působí tuhost. Také rotační pružina má svoji tuhost, která je vyjádřena  $k_{\text{rel}}$ .

**Torzní pružina** představuje nejsložitější prvek FyDiKu. Torzní pružinu určují čtyři translační pružiny spojené do čtyřúhelníku. Výsledný silový účinek  $M$  odpovídá následujícímu vztahu

$$M = k_{\text{rel}} \cdot \frac{\varphi - \varphi_0}{l_0}, \quad (2.6)$$

kde  $\varphi$  vyjadřuje aktuální úhel vektorů příslušných translačních (protějších) pružin,  $\varphi_0$  zadaný úhel a  $l_0$  příslušnou délku segmentu. Veličina  $k_{\text{rel}}$  představuje relativní tuhost v kroucení.

**Síla** je předposledním prvkem softwaru. Umožňuje zadat vnější silový účinek na hmotný bod. Síla nemusí působit pouze konstantním účinkem, ale lze ji superponovat s několika předpřipravenými funkcemi. Tento postup dovoluje aplikovat sílu proměnnou v čase.

**Zrychlení** představuje globální silový účinek na všechny hmotné body. Využití pro zadání gravitačních sil je na snadě.

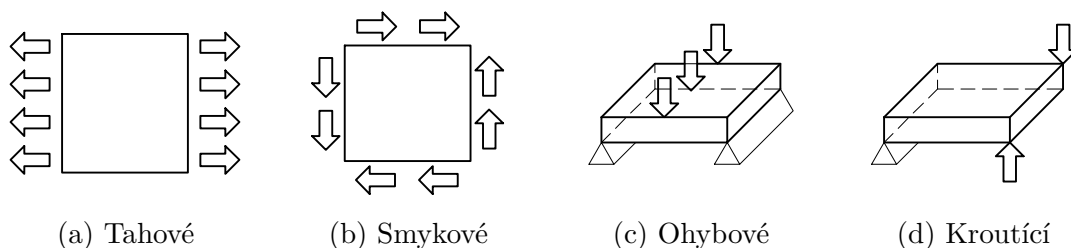
**Hmotnost modelu** přenáší pouze hmotné body. Lze ji tedy zadat buď přímo pro každý hmotný bod zvlášť nebo pomocí translačních pružin, které mohou mít parametr hustoty a nahrazované průřezové plochy. Díky tomu software přepočítá hmotnost odpovídající pružině a tu rovnoměrně rozdělí mezi oba připojené hmotné body. Výsledná hmotnost bodu se rovná součtu příspěvků připojených pružin a vlastní hmotnosti bodu. Pokud nastavujeme hmotnost plošného objektu popsáním způsobem, je třeba nezapomenout zadat hustotu pouze v jednom směru.

### 3 STANOVENÍ CHOVÁNÍ SKOŘEPINY

Jak je známo z klasické mechaniky, skořepiny jsou plošné konstrukce, jejichž dva rozměry výrazně převyšují tloušťku. Obecně mají skořepiny zakřivený tvar, a proto se u nich uplatňují všechny vnitřní síly. Plocha zvonu je zakřivena ve všech směrech, tudíž principiálně odpovídá parametrům skořepiny.

V této kapitole si přiblížíme varianty sestavení modelu, kterým aproximujeme skořepinu. Cílem je takový návrh, který se bude svými vlastnostmi co nejvíce podobat obecné skořepině. Budeme jej však ověřovat na deskostěně a nedostatky z rozdílu zanedbáme. Tento koncept tvorby následně použijeme pro vytvoření zvonové plochy.

Pro jednotlivé složky namáhání existují ekvivalenty zabudované ve FyDiKu. Samostatně jsou popsány v kapitole 2 a dohromady tvoří numerický model. Jednotlivými prvky simulujeme příslušné chování. Translační pružiny nahrazují tahové a tlakové namáhání. Rotační a torzní vyjadřují ohyb resp. kroucení. Jelikož smykové namáhání vlastní speciální pružinu nemá, je třeba tuto tuhost doplnit do modelu pomocí šikmých translačních pružin. Pro smyk v rovině existují různé koncepce, nicméně jak se dílčími experimenty ukázalo, ne všechny jsou vhodné.



Obr. 3.1: Zkoumané elementární typy namáhání

#### 3.1 Stěna a deska

Obdobně jako u deskostěnového problému lze předpokládat superpozici stěnového a deskového řešení. Vlastnosti deskostěny proto navrhujeme a ověříme nejprve pro stěnové chování a následně pro deskové. *Stěna* a *deska* se od sebe liší způsobem uvažované deformace.

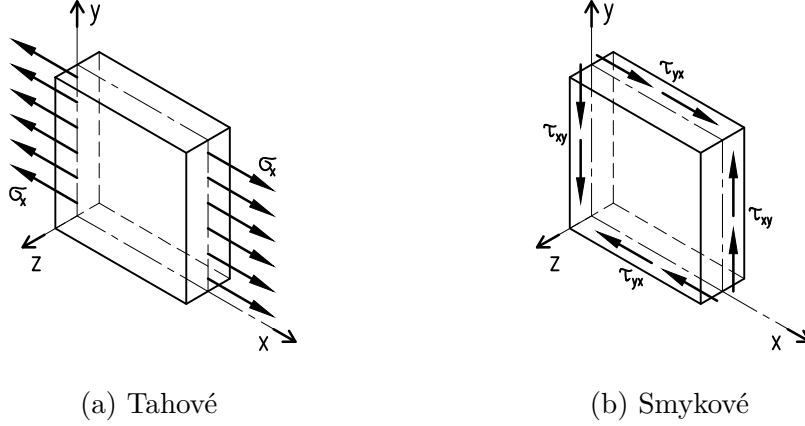
##### 3.1.1 Stěna

Z klasické mechaniky známe pojem *stěna*. Myslíme tím případ, kdy uvažujeme deformaci konstrukce pod zatížením pouze v rovině střednice stěny. Příčně ke střednici

deformace neprobíhá. Rozlišujeme dva základní druhy namáhání – tahové resp. tlakové a smykové. Doplňme, že v lineárních úlohách je tah popsán stejně jako tlak. Pro názornost je uveden obrázek 3.2, pro který platí vztah

$$w(x, y, 0) = 0, \quad (3.1)$$

kde  $w$  je posunutí ve směru  $z$ .



Obr. 3.2: Schéma působení zatížení na *stěnu*

Přetvoření  $\varepsilon$  střednicové plochy ve směru  $x$  a  $y$  a zkosení  $\gamma$  v ploše střednice určují vztahy

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y), \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x), \quad (3.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (3.4)$$

kde

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (3.5)$$

přičemž  $\sigma_x$  resp.  $\sigma_y$  jsou napětí ve směru  $x$  resp.  $y$ ,  $\tau_{xy}$  je smykové napětí v rovině  $xy$ ,  $E$  je modul pružnosti v tahu,  $G$  je modul pružnosti ve smyku a  $\nu$  je součinitel příčné kontrakce.

Pokud uvažíme pouze tahové namáhání ve směru  $x$ , dostáváme následující vztah pro napětí  $\sigma_x$

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (3.6)$$

a analogicky pro směr  $y$

$$\sigma_y = E\varepsilon_y. \quad (3.7)$$

Pro výhradně smykové namáhání je situace podobná, tedy

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}. \quad (3.8)$$

Přetvoření  $\varepsilon_x$  můžeme vyjádřit v rámci lineární teorie jako derivace posunutí  $u$  ve směru  $x$  od tahového namáhání podle  $x$ . Dostaneme tak vztah

$$\frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_x = \frac{du}{dx}. \quad (3.9)$$

A obdobně pro smykové poměrné přetvoření  $\gamma_{xy}$  platí výrazy

$$\frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)\tau_{xy}}{E} = \gamma_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}, \quad (3.10)$$

kde  $\frac{du}{dy}$  je derivace posunutí  $u$  ve směru  $x$  podle  $y$  a  $\frac{dv}{dx}$  je derivace posunutí  $v$  ve směru  $y$  podle  $x$ .

### 3.1.2 Deska

Dále využijeme z klasické mechaniky deskové řešení. Vzhledem ke štíhlosti desky v testovací úloze (jak je popsána v následující části 3.2) se jedná o tzv. *tenkou desku*<sup>1</sup>. *Deska* se deformuje v příčném směru. Uvažujeme, že nedochází k deformaci v rovině střednice. Rozlišujeme zde dva základní mechanismy namáhání – ohyb a kroucení. Názorně to ukazuje obrázek 3.3, kde platí vztah

$$u(x,y,0) = 0, \quad v(x,y,0) = 0, \quad (3.11)$$

kde  $u$  je posunutí ve směru  $x$  a  $v$  ve směru  $y$ .

*Deska* je souhrnně popsána tzv. deskovou rovnicí:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D}, \quad (3.12)$$

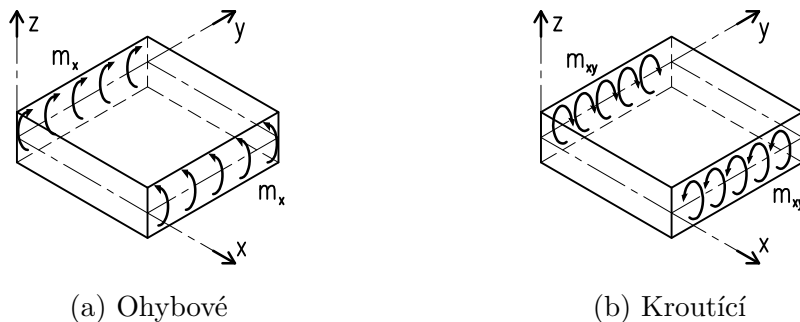
kde  $w$  je posunutí desky ve směru  $z$ ,  $P$  je obecné zatížení a  $D$  odpovídá deskové tuhosti a závisí na třetí mocnině tloušťky  $t$ , jak je zřejmé z výrazu

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (3.13)$$

---

<sup>1</sup>Využijeme *Kirchhoffovu teorii tenkých desek* podle podmínek v [8].





Obr. 3.3: Schéma působení zatížení na *desku*

Pro měrný moment lze vyjádřit vztahy

$$m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3.14)$$

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3.15)$$

$$m_{xy} = -D (1 + \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (3.16)$$

kde  $m_x$  a  $m_y$  jsou měrné ohybové momenty a  $m_{xy}$  je měrný moment krouťící. Jejich jednotkou je pro připomenutí Nm/m.  $D$  je potom desková tuhost ze vztahu 3.13.

## 3.2 Testovací úloha

Vlastnosti skořepiny byly testovány na modelu ocelové desky šířky 0,6 m, délky 0,8 m a tloušťky 0,001 m. Jako materiál byla zvolena ocel s modulem pružnosti  $E = 210$  GPa a součinitelem příčné kontrakce  $\nu = 0,3$ . Za účelem ověření správného chování v softwaru FyDiK i správnosti použité metody fyzikální diskretizace byl vytvořen virtuální model skořepiny stejných rozměrů v komerčním softwaru Scia Engineer<sup>2</sup>. Tento software pracuje na bázi MKP, nejedná se tedy o fyzikální diskretizaci.

Kritériem pro srovnání byla zvolena deformace konstrukce pod zatížením. Srovnány byly tři varianty: řešení analytické, výpočet v softwaru Scia a simulace z programu FyDiK. Správný výsledek z FyDiKu však vyžaduje správné nastavení tuhosti pružinových prvků modelu. Připojen je tedy také vztah pro výpočet tuhosti vkládaný do FyDiKu.

Dle principů fyzikální diskretizace byla deska rozdělena na 20 dílů po šířce a 20 dílů po délce. Jelikož předpokládáme deformaci po tloušťce lineární, vystačíme si

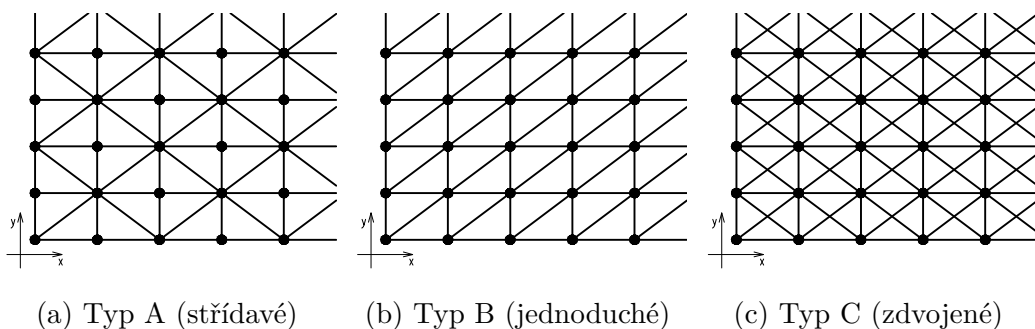
---

<sup>2</sup>software Scia Engineer verze 16.1, použit pod studentskou licenci.

jen s jednou vrstvou. Skořepina byla podepřena v nejmenší možné míře, tedy jako staticky určitá konstrukce.

### 3.3 Určení stěnových parametrů pružinového modelu

Tahové namáhání je bezesporu tím nejjednodušším. V průběhu zkoumání se však ukázalo, že v důsledku zvolené metody přímo souvisí s namáháním smykovým. Pro náhradní pružiny existuje závislost mezi tuhostí ve směru normálovém a tuhostí diagonální, tedy smykovou. Jelikož existuje více variant uspořádání smykových pružin, tak i nastavení jednotlivých tuhostí vkládaných do softwaru závisí na této architektuře. Zkoumány byly tři typy, jejichž zvolené uspořádání přibližuje následující schéma.



Obr. 3.4: Schéma uspořádání smykových pružin

Pokud simulujeme tahové namáhání *pouze kolmými pružinami* bez diagonálních, je úloha velmi prostá. Tuhost pružin odpovídá tuhosti z analytického řešení deformace  $\Delta l$

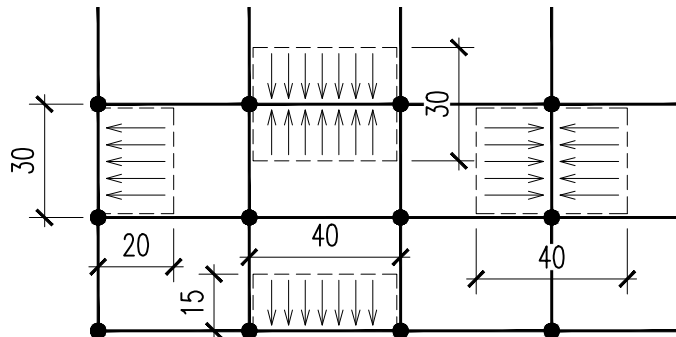
$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{EA}, \quad (3.17)$$

kde  $F$  je síla způsobující deformaci,  $l_0$  je délka tělesa bez zátěže,  $E$  je modul pružnosti v tahu a  $A$  je průřezová plocha. Tuhost  $k_{\text{rel}}$  zadávaná do softwaru FyDiK potom odpovídá vztahu

$$k_{\text{rel}} = EA. \quad (3.18)$$

Uvažujeme variantu *relativní* tuhosti. V takovém případě si program sám spočítá výchozí délku  $l_0$ . Model tvoří translační pružiny na sebe kolmé, které nahrazují

příslušný úsek materiálu odpovídající skutečné tuhosti tohoto úseku ve směru pružiny. Princip nahrazení je zřejmý z obrázku 3.5. Takovýto model má pochopitelně nulovou tuhost ve smyku.



Obr. 3.5: Princip nahrazení tuhosti pro normálové pružiny (jednotky v mm)

### 3.3.1 Typ A – symetrický s jednou diagonálou

Abychom dodali modelu tuhost ve smyku, zvolme nejprve *typ A*. Vyznačuje se jedinou diagonálou v elementárním obdélníku. Tento element sám o sobě působí jako staticky určitá konstrukce. Celkový model z těchto elementů složený je už ale struktura staticky neurčitá. Kvůli tomu vznikají sekundární účinky, způsobující změnu velikosti deformace v normálových pružinách. Z tohoto důvodu byl sestaven vztah pro normálové a diagonální pruty. Odvození se nachází v [10]. A jelikož se je provedeno pro element s dvojnásobným počtem diagonálních pružin, je potřeba zdvojnásobit tuhost diagonál. Určení tuhosti smykové pružiny se děje pomocí náhradní šířky materiálu, který se započítá jako běžná translační pružina. Výpočet této tuhosti  $k_{\text{rel,sh}}$  je zřejmý ze vztahu

$$k_{\text{rel,sh}} = 2 \cdot EA_{\text{sh}} = 2 \cdot E \cdot t \cdot d_{\text{sh}}, \quad (3.19)$$

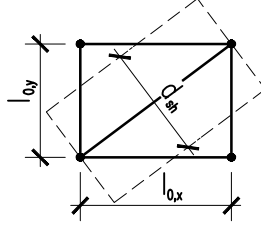
kde  $A_{\text{sh}}$  je náhradní průřezová plocha,  $E$  je modul pružnosti a  $t$  je tloušťka desky. Vidíme, že pro náhradní šířku  $d_{\text{sh}}$  zde figuruje pouze rozměr nejmenšího elementu  $l_{0,x}$  a  $l_{0,y}$  a součinitel příčné kontrakce  $\nu$ . Dostáváme vztah

$$d_{\text{sh}} = \frac{l_{0,d}^3}{4(1 + \nu)l_{0,x}l_{0,y}}, \quad (3.20)$$

kde  $l_{0,d}$  vyjadřuje délku diagonální pružiny podle

$$l_{0,d} = \sqrt{l_{0,x}^2 + l_{0,y}^2}. \quad (3.21)$$

Náhradní šířku ilustruje obrázek 3.6.



Obr. 3.6: Náhradní šířka smykové pružiny

Jelikož se u *typu A* jedná o staticky neurčitou strukturu, vzniknou v normálových pružinách přídavné (sekundární) účinky, které zpětně ovlivňují deformaci v normálovém směru. Tahle skutečnost si žádá dodatečných zásahů. Jak je psáno v [10], je nutno zavést koeficienty  $c_x$  a  $c_y$ , které ovlivní výpočet tuhosti normálových pružin následujícím způsobem:

$$k_{\text{rel},x} = c_x \cdot EA, \quad (3.22)$$

přičemž  $k_{\text{rel},x}$  je normálová tuhost ve směru  $x$  opravená koeficientem  $c_x$ , který s využitím 3.20 vyjadřuje

$$c_x = c - \frac{2l_{0,x}^3 d_{\text{sh}}}{l_{0,y} l_{0,d}^3}, \quad (3.23)$$

respektive

$$k_{\text{rel},y} = c_y \cdot EA, \quad (3.24)$$

kde  $k_{\text{rel},y}$  vyjadřuje normálovou tuhost ve směru  $y$  opravenou koeficientem  $c_y$  dle

$$c_y = c - \frac{2l_{0,y}^3 d_{\text{sh}}}{l_{0,x} l_{0,d}^3}. \quad (3.25)$$

Zde je  $l_{0,d}$  délka diagonály a konstantu  $c$  popisuje

$$c = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sqrt{16l_{0,x}^2 l_{0,y}^2 d^2 + l_{0,d}^6}}{l_{0,d}^3} \right). \quad (3.26)$$

### 3.3.2 Typ B – nesymetrický s jednou diagonálou

Podívejme se na *typ B*. Od prvního typu se liší stejnosměrným uspořádáním diagonál. Ty potom tvoří souvislé rovnoběžné spojení v šikmém směru. Tvarově lze uspořádat pružiny směřující zleva nebo zprava. Chování je však zcela ekvivalentní,

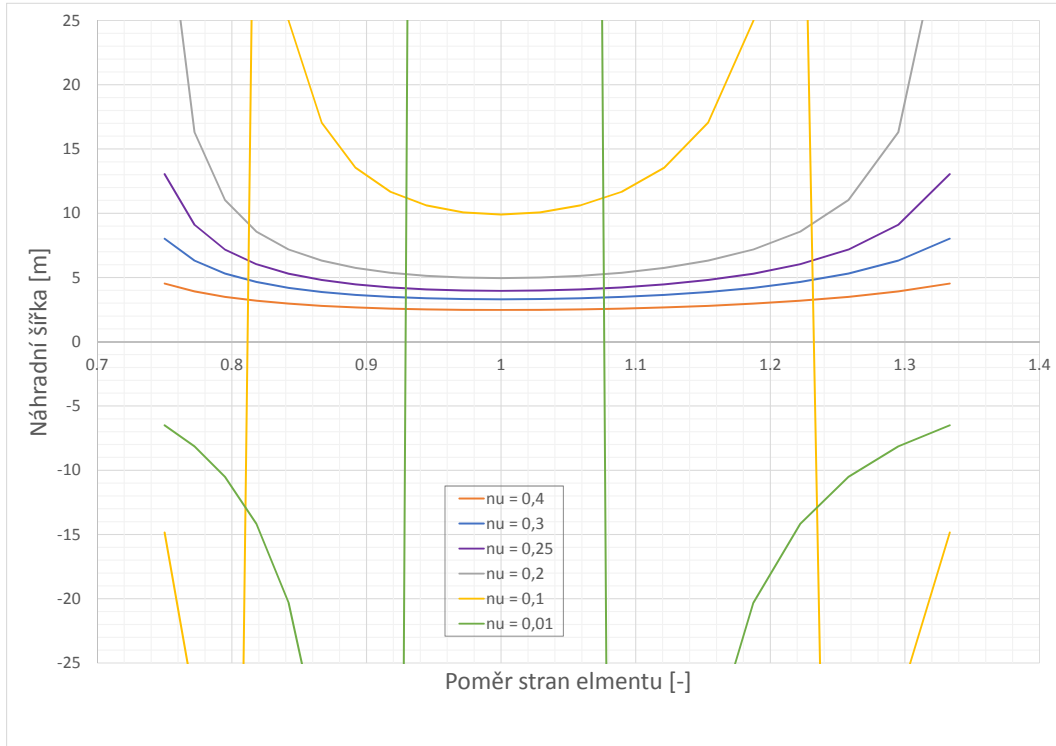
resp. stranově převrácené. Deska je tedy nesymetrická. Přesto, že nejmenší obdélníkový element je staticky určitý, struktura *typu B* působí jako soustava staticky neurčitá. Náhradní šířku  $d_{sh}$  pro smykovou pružinu lze spočítat z výrazu

$$d_{sh} = \frac{l_{0,x} l_{0,y} l_{0,d}^3}{2(1 + \nu) l_{0,x}^2 l_{0,y}^2 - l_{0,x}^4 - l_{0,y}^4}, \quad (3.27)$$

kde  $l_{0,d}$  je délka diagonály podle 3.21 a  $l_{0,x}$  resp.  $l_{0,y}$  jsou délky normálových pružin elementu ve směru  $x$  resp.  $y$ . Výsledná náhradní tuhost  $k_{rel,sh}$  se vypočte podle výrazu

$$k_{rel,sh} = EA_{sh} = E \cdot t \cdot d_{sh}, \quad (3.28)$$

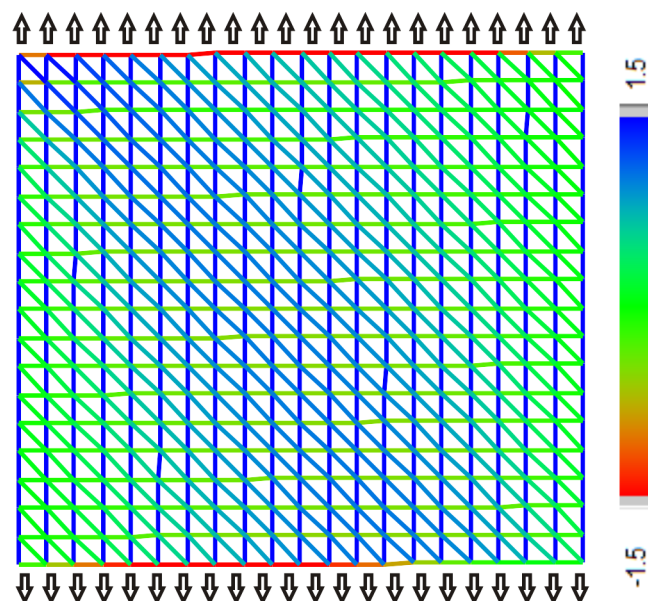
kde  $A_{sh}$  je náhradní průřezová plocha,  $E$  je modul pružnosti a  $t$  je tloušťka desky.



Obr. 3.7: Graf závislosti  $d_{sh}$  na poměru stran a  $\nu$  pro typ B

Bohužel řešení silně závisí na poměru stran a také na součiniteli  $\nu$ . Jak je zřejmé z grafu 3.7, náhradní šířku lze definovat jen pro některé omezené podmínky. Další důsledek chování tohoto typu je zřejmý z obrázku 3.8. Zde vidíme, že se kromě normálových pružin ve směru zatížení aktivují také diagonály. Přirozeně vytvářejí obrazec s rozdělením napětí na elementárním obdélníku s jednou diagonálou.

Deformace ve směru zatížení vychází podle základního vztahu 3.17. Nicméně nepříjemným projevem je zkosení, které se projevuje deformací v příčném směru stejné velikosti jako ve směru zatížení.



Obr. 3.8: Projev nesymetrie uspořádání typu B, barva představuje sílu v pružině udávanou v jednotkách N

Typ	Tuhost	Posunutí rohu [m]
A	původní	$3,71462 \cdot 10^{-5}$
A	dvojnásobná	$1,85738 \cdot 10^{-5}$
C	referenční	$1,85743 \cdot 10^{-5}$

Tab. 3.1: Srovnání *typů* A a C při smyku

### 3.3.3 Typ C – symetrický se dvěmi diagonálami

Nepřesné chování struktury *typu* B vedly k úvaze, že je nutné podstoupit přepočty pružinových tuhostí. Třetí a poslední testovaný *typ* C vykazuje staticky neurčité chování již při zkoumání základního obdélníkového elementu.

Opět zvolíme metodu určení tuhosti diagonální pružiny využitím vztahu 3.28, tedy pomocí náhradní šířky  $c_{sh}$ . Její určení je zřejmé ze vztahu 3.20. Pozornému čtenáři jistě neunikne podobnost s výpočtem této tuhosti pro *typ* A. Ostatně jak je psáno již v úvodu sekce 3.3.1. Stejný model s využitím prvního nebo třetího typu se liší právě dvojnásobným počtem diagonálních pružin pro *typ* C vzhledem k *typu* A. Bylo ověřeno dle tabulky 3.1, že také deformace celku vykazuje právě polovičních hodnot, z čehož bylo usouzeno, že tuhost celku (potažmo diagonálních pružin) *typu* C musí být poloviční vzhledem k *typu* A.

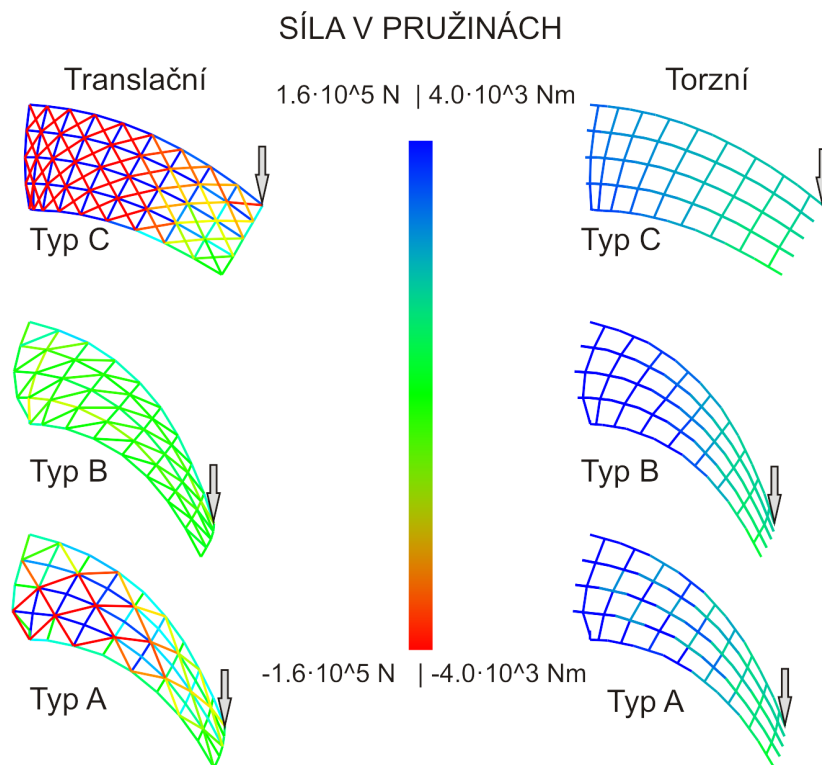
Také u *typu* C bylo zjištěno, že správné chování se neobejde bez dodatečné korekce tuhosti normálových pružin. Oprava byla provedena podle 3.22 a 3.24 stejným způsobem, jako se stalo pro *typ* A.

### 3.3.4 Komplexní test a výběr nejlepšího typu

Na závěr určování stěnových parametrů pružinového modelu bylo třeba vybrat nejlepší typ výpletu diagonálními pružinami. Za tímto účelem byly všechny tři koncepty podrobeny testu v postkritickém namáhání při *klopení*.

Z uvedeného obrázku 3.9 je vidět, že smykové pružiny v modelu *typu C* ztužují konstrukci jako celek a omezují deformaci mimo rovinu modelu. Nutno říci, že model obsahuje správně nastavené rotační a torzní pružiny dle následující podkapitoly 3.4. Síly v torzních pružinách jsou aktivovány v modelu *typu A* a *B*, zatímco v modelu *typu C* je síla přesunuta do smykových pružin, které celek takto nepřiměřeně ztužují.

Pro použití v modelu zvonu byl použit *typ A*, jak vyplývá z uvedeného.



Obr. 3.9: Srovnání typů při poskritickém namáhání

### Vyhodnocení tahu a smyku

Následující tabulky 3.2 a 3.3 shrnují výsledky numerického modelu ve FyDiKu nastaveného dle výše popsaného a výsledky softwaru Scia, které jsou rozepsány v příloze A.1 a A.2.

Posunutí $u$ [m]	FyDiK	Scia Engineer	Procentní odchylka
Typ A	$7,1724 \cdot 10^{-6}$	$7,1460 \cdot 10^{-6}$	0,370 %
Typ B	$7,3342 \cdot 10^{-6}$	$7,1460 \cdot 10^{-6}$	2,63 %
Typ C	$7,1431 \cdot 10^{-6}$	$7,1460 \cdot 10^{-6}$	-0,040 %

Tab. 3.2: Vyhodnocení tahu

Posunutí $u$ [m]	FyDiK	Scia Engineer	Procentní odchylka
Typ A	$1,8574 \cdot 10^{-5}$	$1,8571 \cdot 10^{-5}$	0,015 %
Typ B	$1,8167 \cdot 10^{-5}$	$1,8571 \cdot 10^{-5}$	-2,175 %
Typ C	$1,8574 \cdot 10^{-5}$	$1,8571 \cdot 10^{-5}$	0,018 %

Tab. 3.3: Vyhodnocení smyku

## 3.4 Určení deskových parametrů pružinového modelu

Poněkud odlišná situace nastává pro deskový model. Pro dva základní druhy namáhání z části 3.1.2 ohyb a kroucení existují v softwaru FyDiK speciální pružiny, které simulují jejich účinek na numerický model. Ukazuje se, že nedochází ke vzájemnému ovlivňování při zatížení konstrukce.

### 3.4.1 Ohyb

Nyní se podíváme, jakým způsobem je třeba určit tuhost rotačních pružin vkládanou do FyDiKu. Zjednodušením, které je zabudováno do programu je, že deformace od příčného ohybu desky není uvažována. Důsledkem toho degenerují výrazy 3.14 a 3.15 na

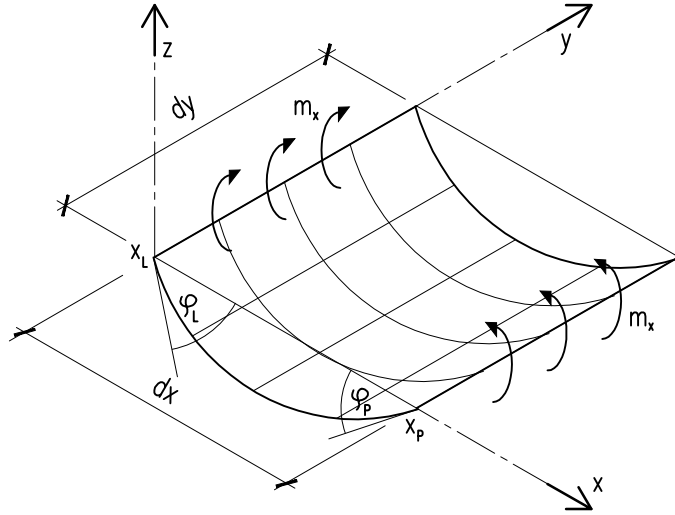
$$m_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (3.29)$$

$$m_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (3.30)$$

což odpovídá prutovému chování. Vyjdeme z obrázku 3.10. Změna posunutí  $w$  podle  $x$  odpovídá pootočení  $\varphi_x$  ve směru  $x$  dle

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x. \quad (3.31)$$





Obr. 3.10: Schéma ohybu

Lze tedy říci že platí

$$\varphi_L = \frac{\partial w}{\partial x} \text{ pro } x = x_L, \quad (3.32)$$

$$\varphi_P = \frac{\partial w}{\partial x} \text{ pro } x = x_P, \quad (3.33)$$

příčemž  $\varphi_L$  resp.  $\varphi_P$  je pootočení levé resp. pravé části. Jejich rozdíl označme  $\Delta\varphi_x$ , pak platí

$$\Delta\varphi_x = \varphi_P - \varphi_L. \quad (3.34)$$

Diferenciál můžeme přepsat jako

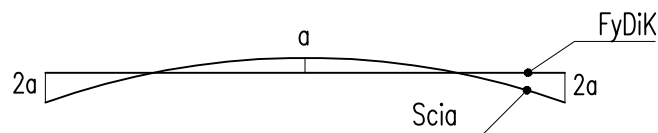
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\Delta\varphi_x}{\partial x} = \frac{\varphi_P - \varphi_L}{\partial x}. \quad (3.35)$$

Dále z výrazu 2.5 pro rotační pružinu můžeme dosazením vztahu 2.1 mezi relativní tuhostí  $k_{\text{rel}}$  a absolutní  $k_{\text{abs}}$  vyjádřit měrný ohybový moment  $m_x$  podle

$$k_{\text{rel}} \frac{\Delta\varphi}{dx} = k_{\text{abs}} \cdot \Delta\varphi = M_x = m_x dy, \quad (3.36)$$

kde  $\Delta\varphi$  je změna pootočení ohybové pružiny a  $M_x$  je ohybový moment pro směr  $x$ . Dosazením 3.14 a 3.35 dostáváme

$$k_{\text{rel}} \frac{\Delta\varphi}{dx} = -D \frac{\Delta\varphi_x}{\partial x} dy, \quad (3.37)$$



Obr. 3.11: Příčný řez ohýbanou deskou

kde změna pootočení  $\Delta\varphi$  odpovídá pro náš případ změně pootočení  $\Delta\varphi_x$  ve směru  $x$ , a proto se vykrátí. Dosadíme 3.13 a upravíme. Záporné znaménko s ohledem na konvenci odstraníme. Dostáváme vztah

$$k_{\text{rel}} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} dy, \quad (3.38)$$

pro výpočet relativní tuhosti torzní pružiny  $k_{\text{rel}}$ , kterou zadáme do softwaru FyDiK.

### Vyhodnocení ohybu

Jelikož byla pro ohyb přijata zjednodušení, je nutno upravit výsledky do požadovaného tvaru. Obrázek 3.11 vysvětluje příčný řez místem uprostřed ohnuté desky. Je vidět, že zanedbáním účinků v kolmém směru dle 3.29 a 3.30 se řez narovná. Chování tak odpovídá prutovému. Pro správnou interpretaci je třeba výsledky z programu Scia nejdříve zprůměrovat váženým průměrem.

Následující tabulka 3.4 shrnuje výsledky numerického modelu ve FyDiKu nastaveného dle výše popsaného a výsledky softwaru Scia, které jsou rozepsány v příloze A.3. Vážený průměr je spočítán v tabulce 3.5 na straně 37.

Software	FyDiK	Scia Engineer	Procentní odchylka
Posunutí $w$ [m]	$-6,115016 \cdot 10^{-6}$	$-6,115000 \cdot 10^{-6}$	0,00026 %

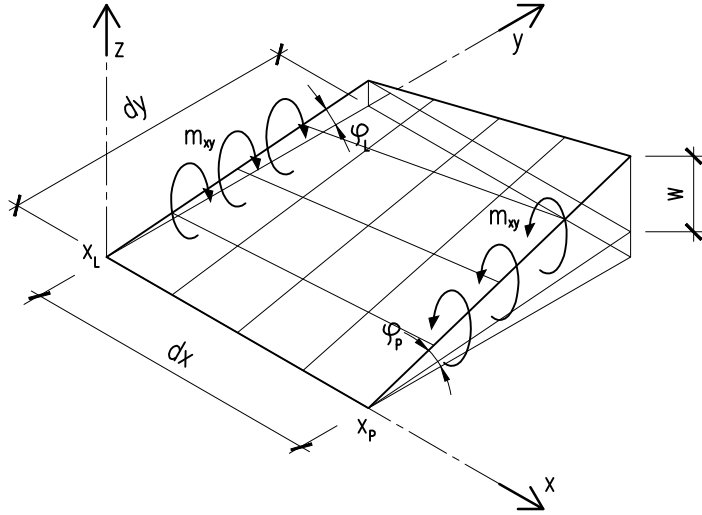
Tab. 3.4: Vyhodnocení ohybu

Místo měření	okraj desky	střed desky	vážený průměr
Posunutí $w$ [m]	$-6,333 \cdot 10^{-6}$	$-5,679 \cdot 10^{-6}$	$-6,115 \cdot 10^{-6}$

Tab. 3.5: Průměrování posunutí pro ohyb, vážený průměr je zřejmý z obr. 3.11

### 3.4.2 Kroucení

Ve správně nastaveném modelu vzdoruje kroucení pouze torzní pružina. Její tuhost se určí následujícím způsobem.



Obr. 3.12: Schéma kroucení

Vyjdeme ze vztahu 3.16 a z obrázku 3.12. Změna posunutí  $w$  podle  $y$  odpovídá pootočení  $\varphi_y$  ve směru  $y$  dle

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y. \quad (3.39)$$

Lze tedy říci že platí

$$\varphi_L = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ pro } x = x_L, \quad (3.40)$$

$$\varphi_P = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ pro } x = x_P, \quad (3.41)$$

přičemž  $\varphi_L$  resp.  $\varphi_P$  je pootočení levé resp. pravé části. Jejich rozdíl označme  $\Delta\varphi_y$ , pak platí

$$\Delta\varphi_y = \varphi_P - \varphi_L. \quad (3.42)$$

Diferenciál můžeme přepsat jako

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\Delta\varphi_y}{\partial x} = \frac{\varphi_P - \varphi_L}{\partial x}. \quad (3.43)$$

Dále z výrazu 2.6 pro torzní pružinu můžeme dosazením vztahu 2.1 mezi relativní tuhostí  $k_{\text{rel}}$  a absolutní  $k_{\text{abs}}$  vyjádřit měrný krouticí moment  $m_{xy}$  podle

$$k_{\text{rel}} \frac{\Delta\varphi}{dx} = k_{\text{abs}} \cdot \Delta\varphi = M_{xy} = m_{xy} dy, \quad (3.44)$$

kde  $\Delta\varphi$  je změna pootočení torzní pružiny a  $M_{xy}$  je kroutící moment z roviny  $xy$ . Dosazením 3.16 a 3.43 dostáváme

$$k_{\text{rel}} \frac{\Delta\varphi}{dx} = -D(1 - \nu) \frac{\Delta\varphi_y}{\partial x} dy, \quad (3.45)$$

kde změna pootočení  $\Delta\varphi$  odpovídá pro náš případ změně pootočení  $\Delta\varphi_y$  ve směru  $y$ , a proto se vykrátí. Dosadíme 3.13 a upravíme. Záporné znaménko s ohledem na konvenci odstraníme. Dostáváme vztah

$$k_{\text{rel}} = \frac{Et^3}{12(1 + \nu)} dy, \quad (3.46)$$

pro výpočet relativní tuhosti torzní pružiny  $k_{\text{rel}}$ , kterou zadáme do softwaru FyDiK.

Nutno připomenout, že FyDiK počítá tuhost v kroucení zvlášť pro směr  $x$  a zvlášť pro  $y$ . Pokud tedy stavíme model jako v našem případě pouze s jednou torzní pružinou, je třeba počítat s dvojnásobnou tuhostí.

### Vyhodnocení kroucení

Následující tab. 3.6 shrnuje výsledky numerického modelu ve FyDiKu nastaveného dle výše popsaného a výsledky softwaru Scia, které jsou rozepsány v příloze A.4.

Software	FyDiK	Scia Engineer	Procentní odchylka
Posunutí $w$ [m]	$1,189 \cdot 10^{-4}$	$8.928 \cdot 10^{-5}$	33,14 %

Tab. 3.6: Vyhodnocení kroucení

## 3.5 Nastavení parametrů modelu deskostěny

Na závěr této kapitoly ještě zmíníme konkrétní nastavení tuhostí pro model ocelové desky délky 0,8 m ve směru  $x$  a šířky 0,6 m ve směru  $y$  a tloušťky 0,001 m. Numerický model byl rozdělen na  $20 \times 20$  elementů. Tabulka shrnuje relativní tuhosti pružin.

Pružina	vnitřní	okrajová	jednotky
Normálová $x$	2 816 784	1 408 392	N/m
Normálová $y$	7 681 108	3 840 554	N/m
Smyková	8 413 161	–	N/m
Rotační $x$	0,525	0,2625	Nm/rad
Rotační $y$	0,700	0,350	Nm/rad
Torzni $(y)$	0,808	–	Nm/rad

Tab. 3.7: Shrnutí tuhostí pružin modelu deskostěny

## 4 REÁLNÝ ZVON

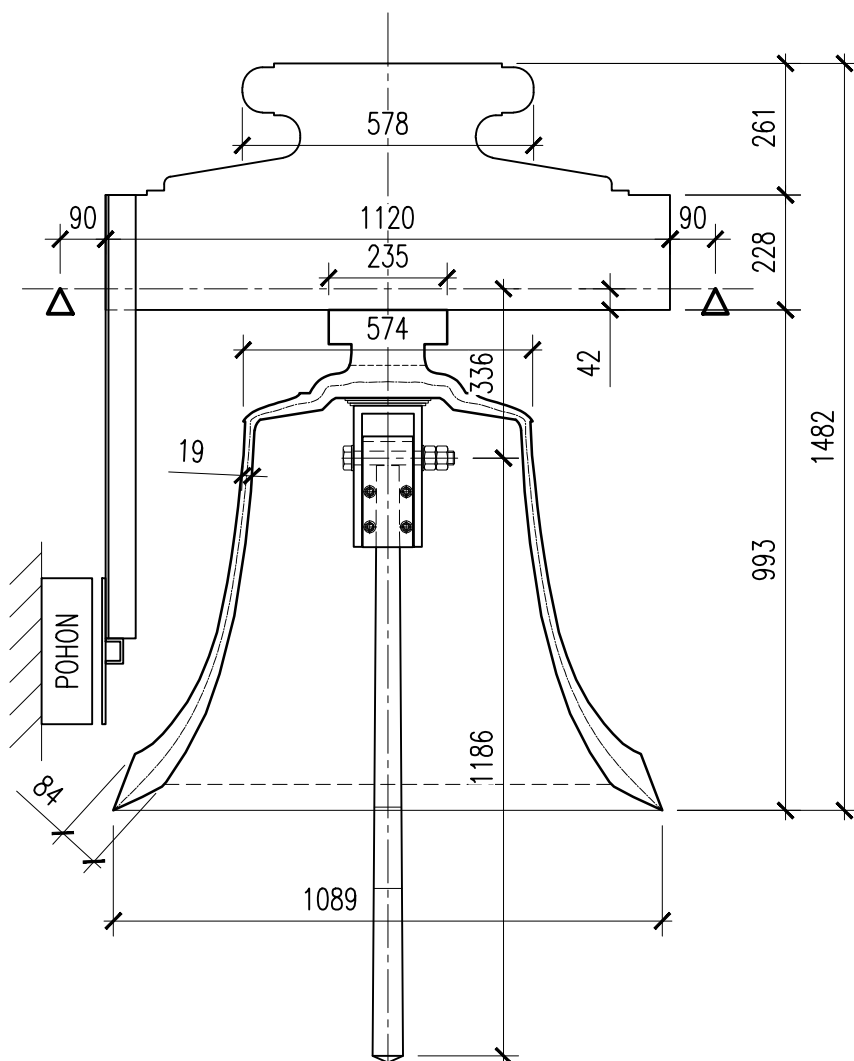
V rámci této diplomové práce byl podroben zkoumání reálný zvon, který visí ve věži kostela nanebevzetí Panny Marie ve Strážnici. Stal se tak předlohou pro vytváření virtuálního modelu. Autor provedl vlastní měření potřebných údajů.



Obr. 4.1: Zkoumaný zvon z roku 1988

Jde o zvon poměrně mladý, novodobého typu. V roce 2015 prošel opravou, získal nové srdce, byl převěšen na nové dubové jařmo a opatřen potřebným kováním. Zejména však byl výrazně zmodernizován elektrický pohon zvonu. Instalován byl lineární motor, jež přenáší hnací sílu bezkontaktně principem magnetického polštáře do ocelového ramene připojeného k jařmu. Díky tomu jsou minimalizovány silové rázy. Zařízení navíc umožňuje různé nastavení působení síly v čase i na jednotlivé strany (symetrie bití).

**Hmotnost** patří mezi klíčové parametry všech dynamických jevů. Jelikož pro jednotlivé části nebylo možné určit hmotnost přímo, autor zvolil metodu přepočítání hmotnosti ze součinu změřeného objemu a obvyklé hustoty materiálu. Nejprve byl určen tvar zvonu měřením rozměrů, pro průměr dutinovým hmatadlem, pro obvod měřícím pásmem. Následně byly hodnoty zpracovány v CAD softwaru, který umožnil stanovit objem. Na závěr byla provedena kontrola hmotnosti zvonu i srdce přepočtem z výchylky způsobené známou silou. Princip objasňuje obrázek 4.5.

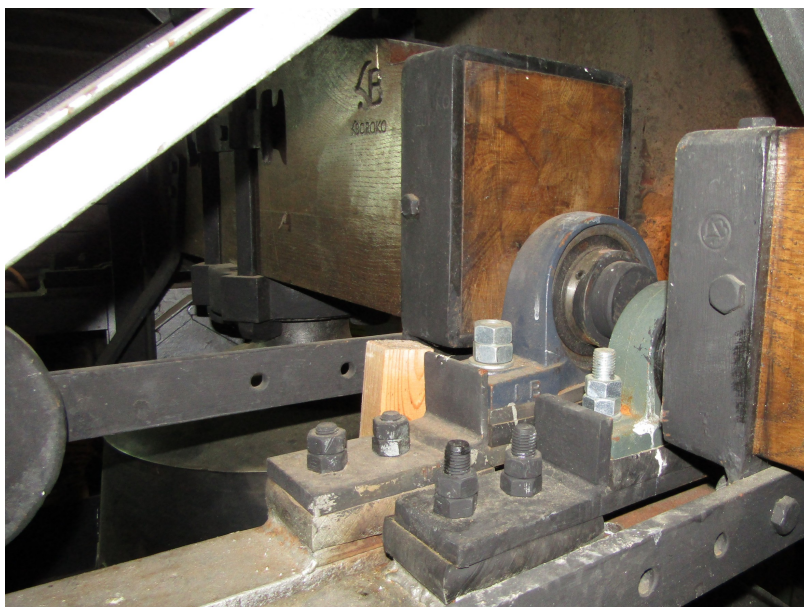


Obr. 4.2: Vyšetřený tvar zvonu

Pro přesné stanovení dynamických parametrů neměl autor dostatečné vybavení. Omezíme se tedy pouze na určení úhlu náklonu a periody dvojkyvu zvonu, čili doby, kdy se zvon vrátí do stejné polohy. Tato hodnota byla stanovena na 1,98 s. Dále byl pořízen zvukový záznam jednoho úderu srdce, který byl zpracován frekvenční analýzou, kterou přibližuje obrázek 4.7. V rámci průzkumu byl také natočen videozáznam kompletního cyklu zvonění.

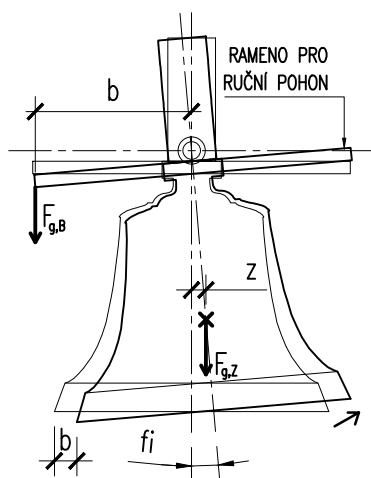


Obr. 4.3: Detail připojení srdce ke zvonu

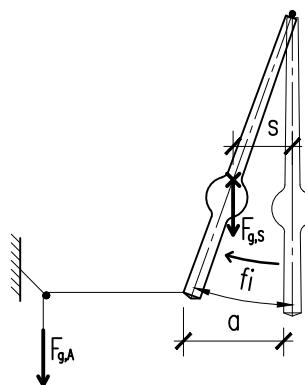


Obr. 4.4: Detail ložiska a pryžových tlumících bloků



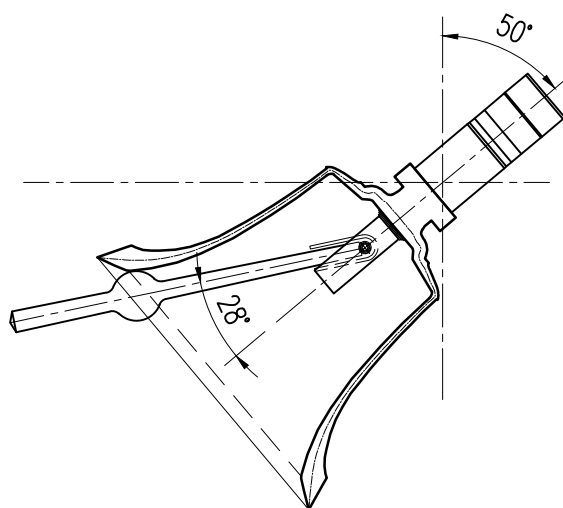


(a) Ověření hmotnosti zvonu

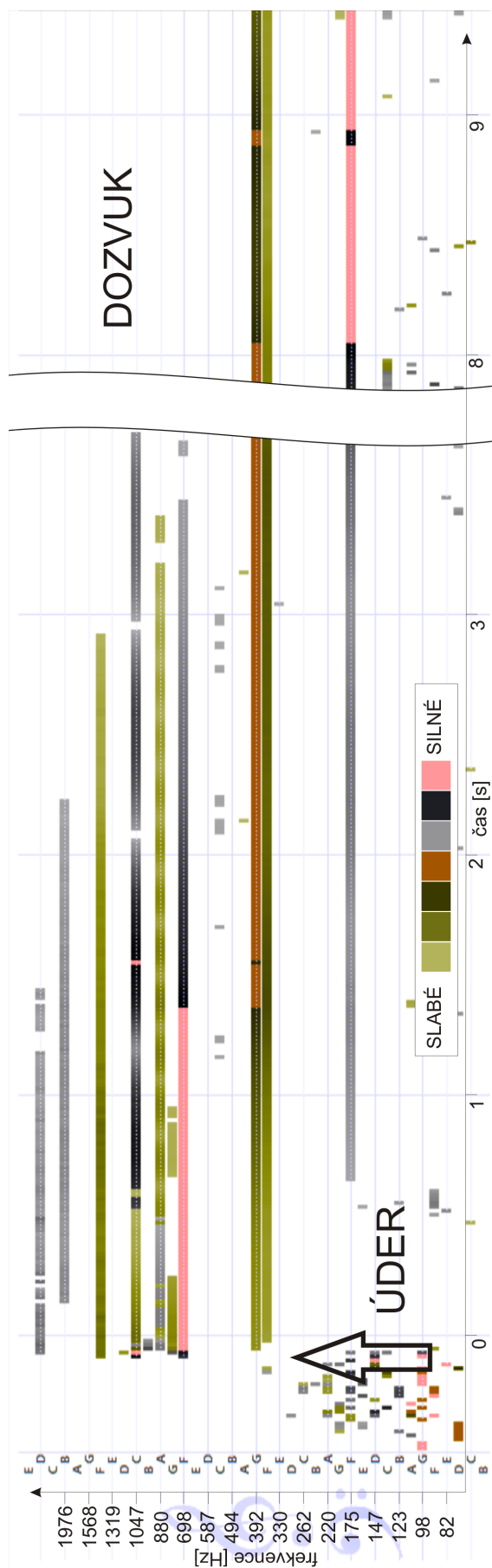


(b) Ověření hmotnosti zvonu

Obr. 4.5: Schéma ověření hmotnosti



Obr. 4.6: Maximální výchylka zvonu a srdce



Obr. 4.7: Zjednodušená frekvenční analýza reálného zvomu



## 5 VIRTUÁLNÍ MODEL ZVONU

Cílem této práce bylo sestavení numerického modelu skutečného zvonu. V této kapitole si popíšeme, jak samotný model vznikl, jaké byly použity nástroje a jaké byly zavedeny zjednodušení. Nezbytnou částí je také vyhodnocení, jak dobře odpovídá model skutečnosti.

V kapitole 3 bylo ověřeno nastavení pružinových funkcí pro simulaci plošného skořepinového objektu. Pro správné chování importovaných objektů (viz dále) byly závěry implementovány do FyDiKu autorem tohoto softwaru doc. Fantíkem. Následně bylo provedeno vyhodnocení chování celku.

### 5.1 Nástroj Import z XML

Jak již bylo napsáno, model v prostředí FyDiK je tvořen soustavou prvků, jež mají mezi sebou přesně definovaný vztah. Například a zároveň nejjednodušeji je to hmotný bod a translační pružina, jinými slovy styčnick a kloubově uložený prut.

Ve FyDiKu je možné zadávat entity ručně. Typicky je hmotný bod zadán souřadnicemi v dialogovém okně, translační pružina kliknutím na počáteční a koncový bod. Výsledný model tvoří zhruba 2700 entit, proto bylo třeba využít automatizované nástroje, které zrychlí práci. Velkou pomoc v této oblasti nabízí import z formátu XML.

Obecně lze říci, že FyDiK má zabudovaný nástroj, který ze vstupního kódu ve formátu XML vytvoří entity nebo jejich sekvence, které mají požadované vlastnosti ze zadaných parametrů. Například zadáním čtyř vrcholů obdélníku, jeho tloušťky a hustoty FyDiK sám nastaví hmotnost.

Pro vytvoření numerického modelu bylo s úspěchem využito importovacího nástroje. Pro snazší úpravu a ladění výsledného modelu byl vytvořen rozsáhlý framework<sup>1</sup> v prostředí Microsoft Excel.

Numerický model byl vytvořen importem tří větších objektů. Následně byly objekty propojeny ručně. Následující čtyři sekce přibližují postupy vedoucí ke kompletnímu numerickému modelu zvonu, který byl v rámci této práce vytvořen.

### 5.2 Zakřivená plocha zvonu

Pro účely této práce byl zaměřen tvar skutečného zvonu, z něhož byl zpracován tvar žebra zvonu v softwaru AutoCAD<sup>2</sup>. Z něj vyplynula střednice žebra a ta byla

---

<sup>1</sup>Framework je softwarová struktura (program) sloužící pro zjednodušení práce, vývoje a organizace jiných softwarových projektů.

<sup>2</sup>AutoCAD 2017, použit pod studentskou licenci.

následně vykreslena funkcí SPLINE. Souřadnice řídících bodů křivky byly použity v rámci importu.

Soubor XML je pro import do FyDiKu potřeba nastavit následujícím způsobem. Nejprve je třeba definovat materiál. Buď použijeme předpřipravené balíčky (např. `cz.kitnarf.materials.steel`) nebo si můžeme definovat materiál vlastní. V takovém případě je třeba zadat modul pružnosti, hustotu a koeficient příčné kontrakce.

Dalším krokem je určení průřezu. Obecně se průřez použije pro pruty, ale jelikož stavíme plochu, rozměry se ve výsledku neuplatní.

Poté zadáme souřadnice dvou hmotných bodů. Jsou to krajní body polygonu, který je tvořen řetězcem na sebe navazujících hmotných bodů a pružin. V našem případě aproximuje střednici žebra zvonu. Přesněji řečeno mezi krajními (zadanými) hmotnými body je sestaven prostorový kubický spajn podle zadaných souřadnic řídících bodů (značka<sup>3</sup> `SplineBeam`). Po délce této křivky se rovnoměrně vloží virtuální body tvořící tento pružinový polygon. Jejich počet vyplývá ze zadaného počtu dílů, na které se má křivka dělit. Pokud přidáme parametr `fictive="true"`, vnitřní body se nevytvoří v modelu, ale pouze se použijí pro další krok. V tomto případě byl zvolen bod na okraji zvonu – lemu a bod cca 5 cm vzdálený od svislé osy. Polygon mezi nimi čítá 18 dílů.

Na závěr použijeme značku `RotationalSurface`. K němu zadáváme tloušťku materiálu v každém bodě aproximujícího řetězce. Tato hodnota přepíše údaj zadaný jako průřez. Tloušťka zvonu je po délce žebra proměnlivá, proto byla použita metoda přepočtu dle plochy příslušící bodům polygonu na obdélník.

Importovací nástroj vezme zadané údaje tloušťky materiálu a vytvoří síť pružin odpovídající deskostěně, která byla studována v kapitole 3. Vnitřní struktura je dána příkazem `type` dle tabulky 5.1. Zadáváme počet dílů, na který má být rozdělen obvod rotační plochy. V případě našeho zvonu je kružnicový tvar nahrazen 16 díly po obvodě. FyDiK orotuje polygon kolem osy  $z$ .

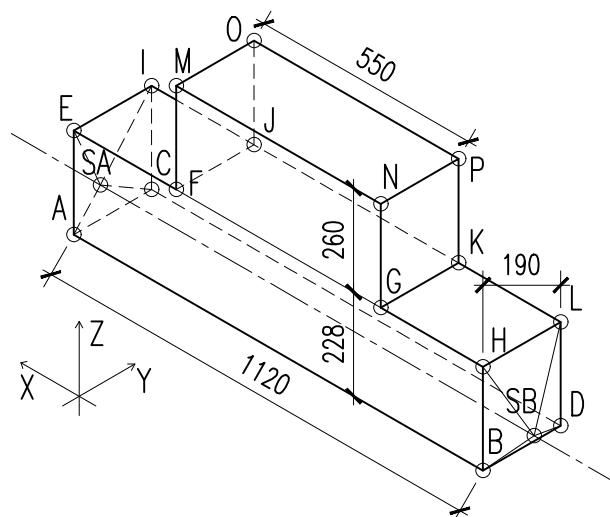
Obsah souboru XML pro rotační plochu je k vidění v příloze B.

Typ struktury	A	B	C
<code>type=</code>	"0"	"1"	"3"

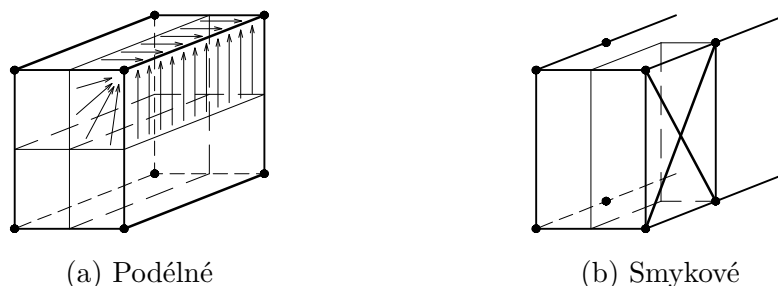
Tab. 5.1: Nastavení typu struktury desky

---

<sup>3</sup>neboli tag v kódu v souboru XML



Obr. 5.1: Schéma tvarového zjednodušení modelu jařma



Obr. 5.2: Nahrazení objemu pružinami

## 5.3 Jařmo a příslušenství

Dubové jařmo nesoucí samotný zvon je modelováno jiným způsobem než rotační plocha zvonu. Opět je použit importovací nástroj z formátu XML. Nicméně výplet objemu jařma je tvořen systémem prutů. Nejsou zde vůbec rotační a torzní pružiny, protože vzhledem k celkovému objemu jařma představují zanedbatelnou přidanou hodnotu na rozdíl od plochy zvonu. Byly proto z důvodu optimalizace výpočtu zanedbány.

Tvarově bohatý dubový závěs bylo nutné zjednodušit. Vznikl tvar složený ze dvou kvádrů. Schéma 5.1 zobrazuje hlavní pruty. Výplet byl proveden dle zásad stěnového modelu *typu C* z kapitoly 3. Princip nahrazení tuhostí v objemu jařma příslušnými pružinami přibližuje obrázek 5.2.

Je nutno podotknout, že se na jařmu nachází větší množství ocelového příslušenství, které bylo osazeno spolu s dubovým jařmem při poslední opravě zvonového vybavení v roce 2015. Započítáno bylo pouze mírným zvýšením hustoty dřeva, do-

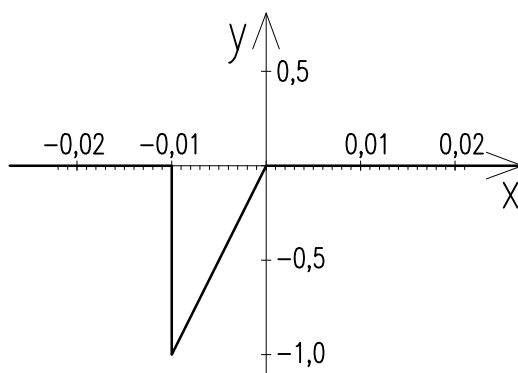
datečné ztužení bylo zanedbáno.

Dále bylo vymodelováno rameno, kterým je do modelu vnášen účinek hnacího zařízení. Jedná se o čtyři jednoduché pružiny o tuhosti instalovaných ocelových L profilů  $60 \times 60 \times 6$ . Spojují se do jednoho hmotného bodu, kam byla umístěna hnací síla.

Jako poslední v této části byly vytvořeny podpory, které svojí tuhostí simulují pryžové bloky, na kterých je usazeno ložisko jařma. Pro tuhost pružiny byl použit dynamický modul pružnosti pryže hodnoty 300 MPa.

## 5.4 Srdce a problém kontaktu

Aby mohl zvon vydávat zvuk, je zapotřebí srdce. Také tento objekt byl vytvořen pomocí importu. Model srdce se skládá z úvazu, pěsti a dolního konce výpusky. Materiálem je ocel. Úvaz byl modelován tak, aby bylo umožněno kývání srdce pouze v jedné rovině. Pro bití pěsti do rány zvonu bylo třeba vytvořit entitu, která umožní simulaci kontaktní úlohy. Řešení není složité. Bod pěsti byl spojen s body v místech dopadu srdce translační pružinou, která má definovanou délku jako vzdálenost bodu na střednici žebra zvonu a středu pěsti srdce. Funkce tuhosti musí být nelineární. Konkrétně se osvědčila polygonální funkce se dvěma body jak ukazuje obrázek 5.3.



Obr. 5.3: Diagram polygonální funkce kontaktu

kde osa  $x$  představuje deformaci a osa  $y$  koeficient tuhosti. Pokud je tuhost nastavena jako relativní, jedná se o deformaci také relativní. Odpovídá tedy  $\varepsilon$ . Koeficient se uplatní jako násobitel zadané tuhosti. Pro vysvětlení principu poznamenejme, že pokud je srdce vzdáleno od stěny, je kontaktní pružina prodloužena do kladných čísel osy  $x$ . Pokud se srdce přiblíží na vzdálenost kontaktu, čili nastavené délce, aktivuje se tuhost pružiny, která ovlivní pohyb srdce. Nutno připomenout, že při vysoké rychlosti, krátké aktivní zóně (na ose  $x$ ) nebo velkém kroku simulace může

dojít k situaci, kdy hmotný bod přeskočí aktivní zónu a napětí z kontaktu se vůbec neuplatní. Srdce potom proletí stěnou, což je pochopitelně negativní jev.

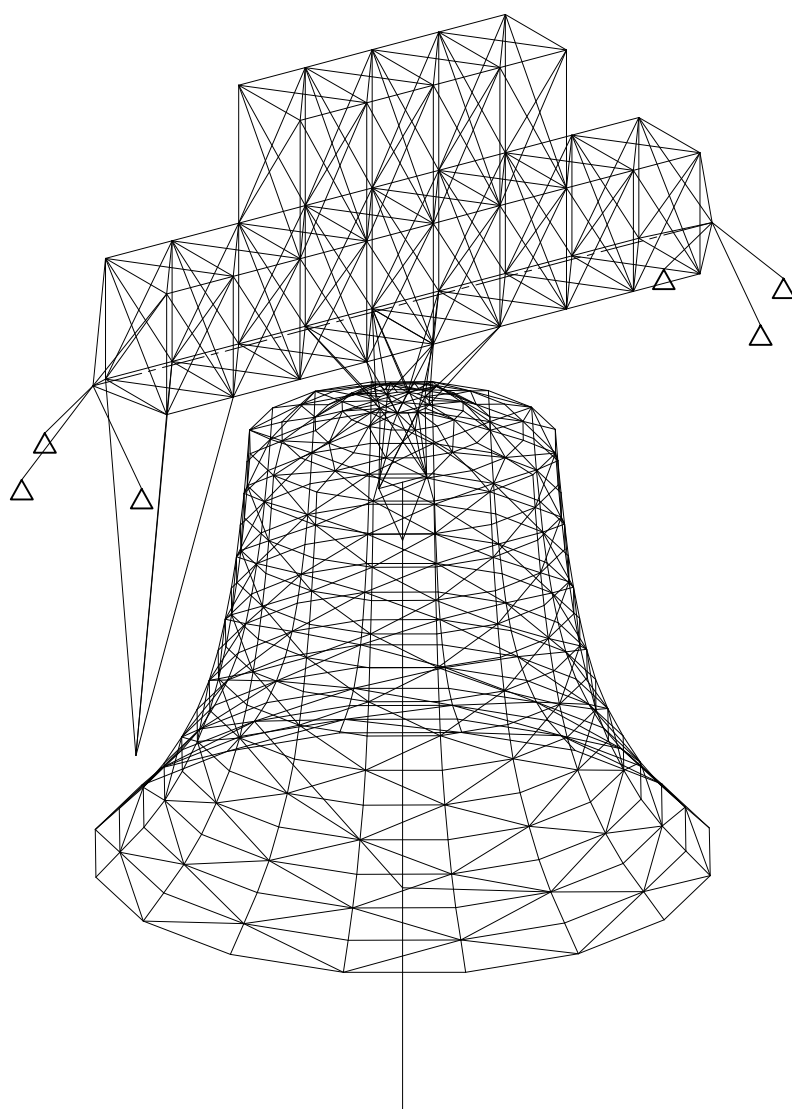
## 5.5 Ruční propojení objektů

Na závěr procesu vytváření numerického modelu zvonu bylo nutné všechny objekty propojit, pokud tak nebylo učiněno v rámci importu. Zaprvé byl uzavřen otvor ve vrcholu rotační plochy, který vznikl tím, že za horní koncový bod tvořícího polygonu zvonové plochy je ve skutečnosti vzat bod cca 5 cm od osy rotace. Tímto řešením se zamezilo vzniku elementů nevhodných ostroúhlých rozměrů. Zadruhé byly doplněny pružiny nahrazující talířovou hlavu zvonu a propoující tak rotační plochu s dubovým járem. Zatřetí byl vytvořen přípoj osy srdce ke zvonu. Jelikož je spojení v reálném zvonu podloženo koženými pruhy, bylo třeba přepočítat tuhost propojujících pružin a zahrnout tak kožené změkčení. Připomeňme si známý vztah výpočtu tuhosti  $k$  sériově zapojených pružin 5.1.

$$\frac{1}{k_{\text{celková}}} = \frac{1}{k_{\text{zvon}}} + \frac{1}{k_{\text{kůže}}} + \frac{1}{k_{\text{srdce}}} \quad (5.1)$$

Příslušné tuhosti byly přepočítány do co nejpřesnějších hodnot. Jelikož nebylo možné zajistit všechny potřebné podklady pro přesný model, byly parametry tuhosti (modul pružnosti, průřezová plocha) odhadnuty inženýrským přístupem. Vliv případných nepřesností v rámci řádu tuhosti na celkový model není tak zásadní, a proto si tento postup můžeme dovolit.





Obr. 5.4: Výsledný virtuální model – pouze translační pružiny

## 6 EMULACE ZVUKU A OVĚŘENÍ NUMERICKÉHO MODELU

Na numerickém modelu, jehož vytvoření popisuje kapitola 5, byly zkoumány dynamické vlastnosti. Cílem bylo zjistit, zda se model blíží reálnému chování či nikoli. Následující řádky popisují objektivní kvalitativní kritéria a jejich výsledky.

### 6.1 Simulace

V rámci simulace byly uvažovány čtyři případy s odlišnými výchozími podmínkami. Jelikož se jedná o nelineární systém zvon – srdce, tak dva případy byly simulovány s fixovaným srdcem ke stěně zvonu a dva případy se srdcem volným. Jeden případ z každé dvojice byl simulován s počáteční výchylkou  $10^\circ$  a druhý s výchylkou  $50^\circ$ . Ačkoli software umožňuje zadat sílu proměnnou v čase, byly všechny čtyři případy spuštěny pouze se zatížením od gravitační síly.

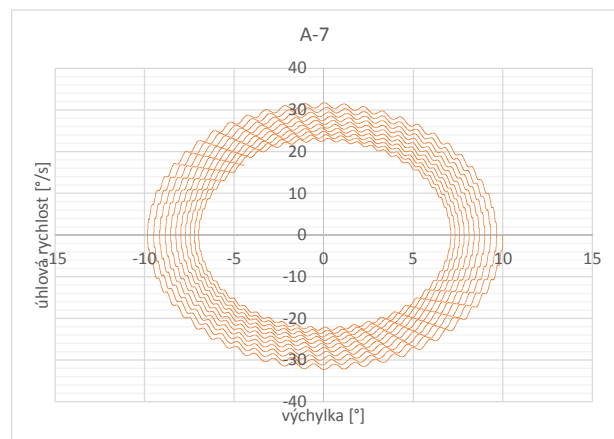
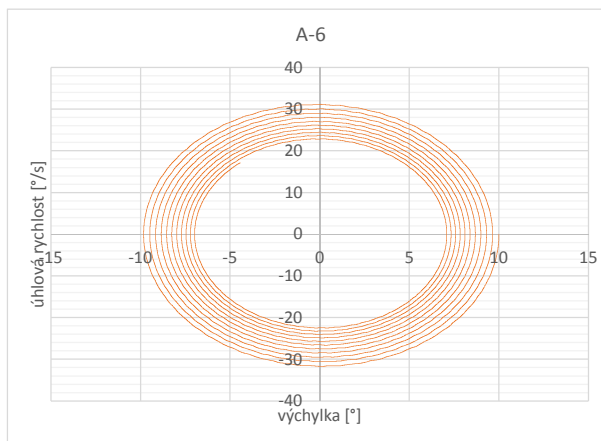
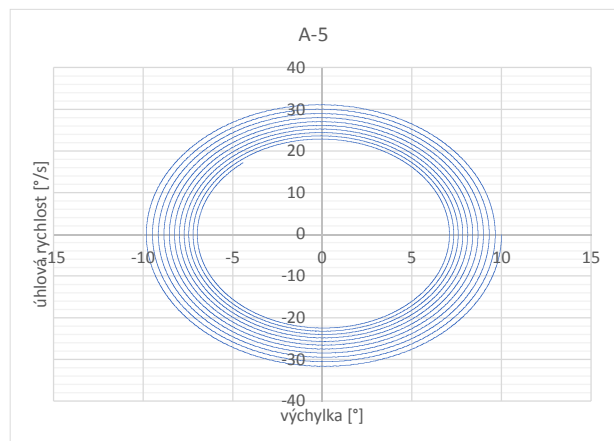
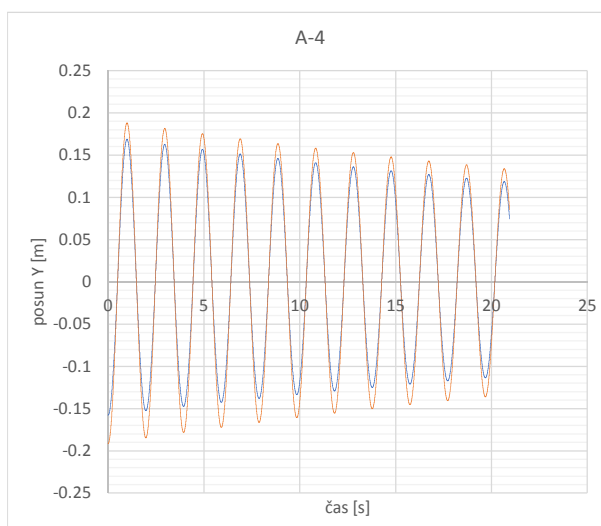
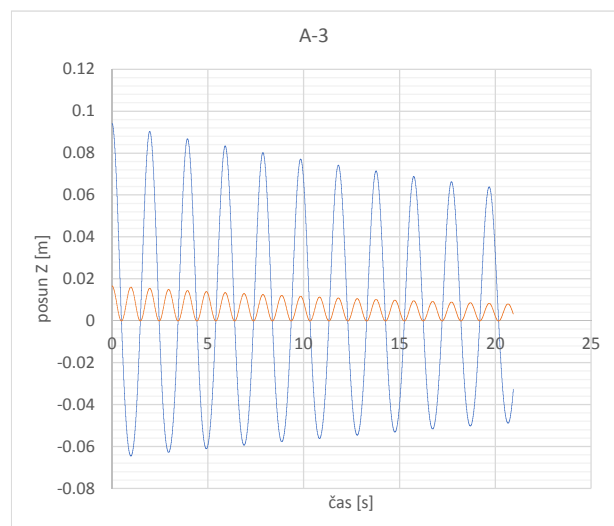
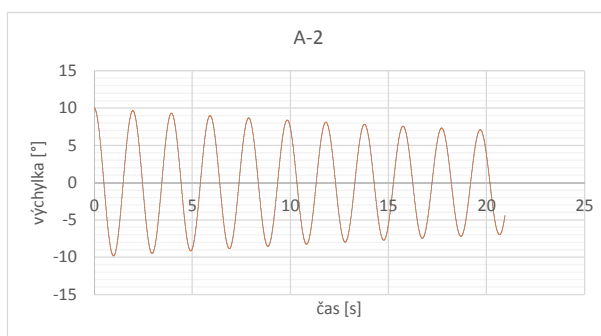
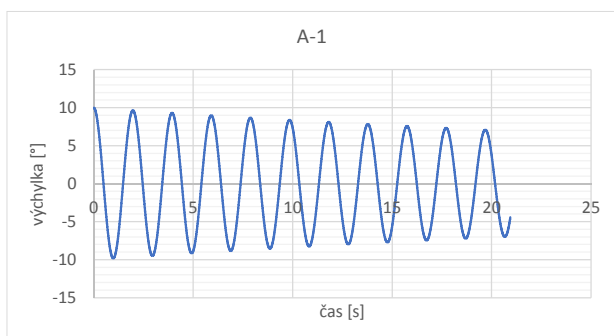
Bylo sledováno chování jednotlivých částí v průběhu času. Sledován byl bod ve vrcholu zvonu pro určení jeho výchylky, dále bod na ráně zvonu v místě dopadu srdce, bod v pěsti srdce a bod na ose závěsu srdce. Z těchto údajů, které poskytl výpočet softwaru FyDiK, byly vypočítány veličiny, které jsou tímto způsobem uvedeny v následujících grafech, které vyjadřují:

1. výchylka zvonu v čase,
2. výchylka stěny zvonu versus výchylka srdce vzhledem k ose závěsu srdce v čase,
3. posunutí ve směru osy  $z$  (svisle) stěny zvonu versus pěsti srdce v čase,
4. posunutí ve směru osy  $y$  (do strany) stěny zvonu versus pěsti srdce v čase,
5. závislost úhlové rychlosti na výchylce pro stěnu zvonu (projekce trajektorie ve fázovém prostoru<sup>1</sup>),
6. závislost úhlové rychlosti na výchylce kolem hlavní osy pro pěst srdce (projekce trajektorie ve fázovém prostoru),
7. závislost úhlové rychlosti na výchylce kolem osy závěsu pro pěst srdce (projekce trajektorie ve fázovém prostoru).

Pro správnou interpretaci následujících výsledků uvedme, že v grafech značí modrá barva bod zvonu a oranžová bod srdce. Dále připomeňme, že výchylky a posunutí jsou upraveny tak, aby při uklidnění dávaly hodnotu rovnou nule.

---

<sup>1</sup>Fázové prostory blíže popisuje [11].



### 6.1.1 Příklad A – počáteční výchylka $10^\circ$ , fixované srdce

**A-1:** Výchylka zvonu v čase.

**A-2:** Výchylka srdce a stěny zvonu v čase. Pro srdce je použita výchylka vztažená k ose závěsu srdce. Je vidět, že se co do velikosti a časového průběhu překrývají.

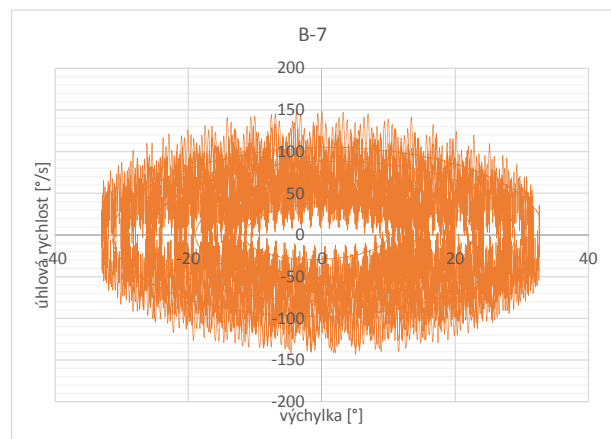
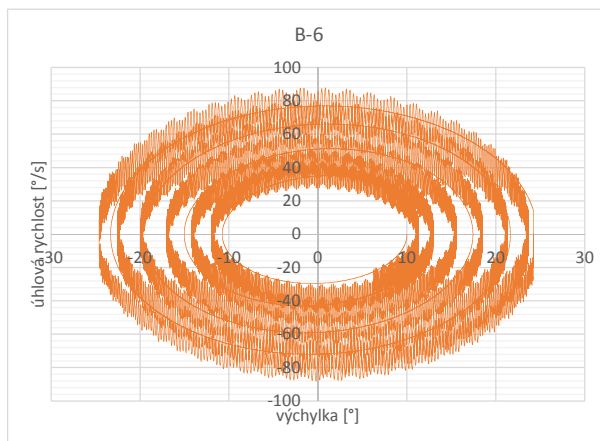
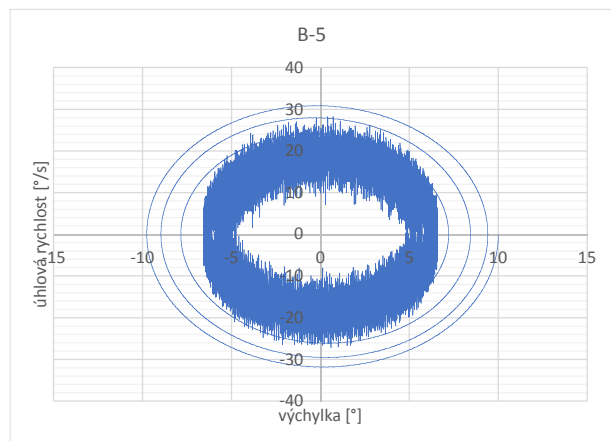
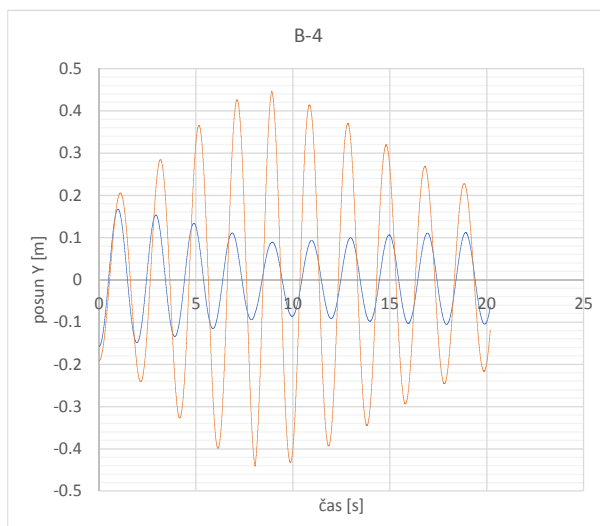
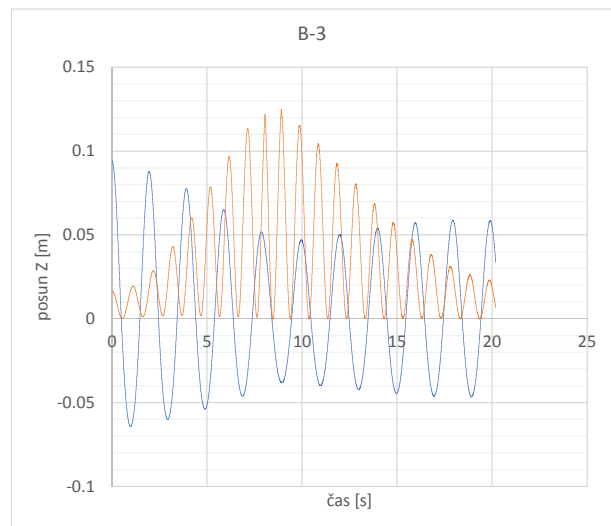
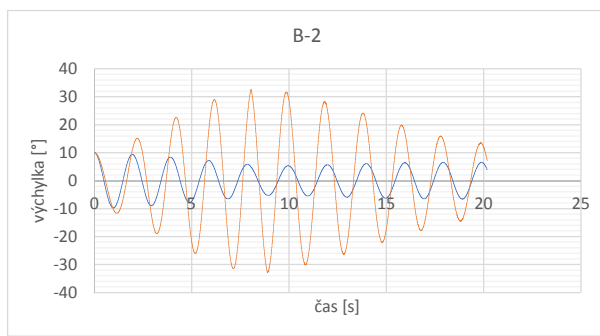
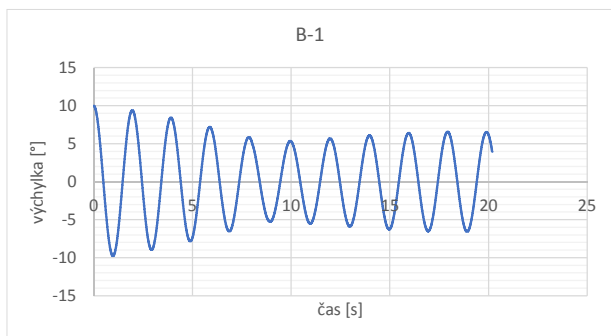
**A-3:** Svislá souřadnice  $z$  pro srdce a bod stěny zvonu v čase. Srdce má přirozeně dvojnásobnou frekvenci.

**A-4:** Vodorovná souřadnice  $y$  pro srdce a bod stěny zvonu v čase. Srdce má přirozeně dvojnásobnou frekvenci.

**A-5:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu stěny zvonu. Spirálovité zakřivení je způsobeno tlumením.

**A-6:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu srdce. Výchylka je vztažená k hlavní ose kyvu zvonu.

**A-7:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu srdce. Výchylka je vztažená k ose závěsu srdce. Drobné vlnky po délce trajektorie jsou způsobeny fixací srdce do stěny zvonu. Za upozornění stojí rozdíl tvaru trajektorie vzhledem k *A-6*, kde se tento jev nevyskytuje. Jelikož jde v tomto případě o výchylku vztaženou k jinému bodu, který se též pohybuje, lze se domnívat, že kmitající bod osy závěsu srdce způsobuje onen efekt. Připoj osy závěsu srdce ke zvonu je řádově nižší tuhosti, aby simuloval tlumící efekt kůže. A jelikož nelze docílit toho, aby byl zvon při začátku simulace klidný, nelze ani odstranit tento efekt.



### 6.1.2 Příklad B – počáteční výchylka $10^\circ$ , volné srdce

**B-1:** Výchylka zvonu v čase.

**B-2:** Výchylka srdce a stěny zvonu v čase. Pro srdce je použita výchylka vztažená k ose závěsu srdce. Je zde vidět, že se kinetická energie zvonu přenáší na srdce, které tak rozhoupává. Dokonce do té míry, že udeří do rány zvonu. Srdce způsobuje tlumení kyvu zvonu.

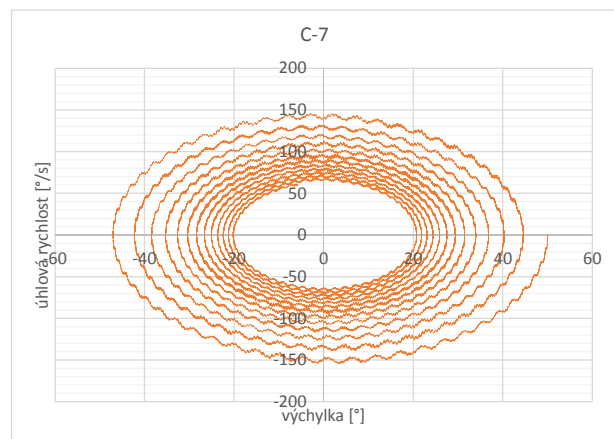
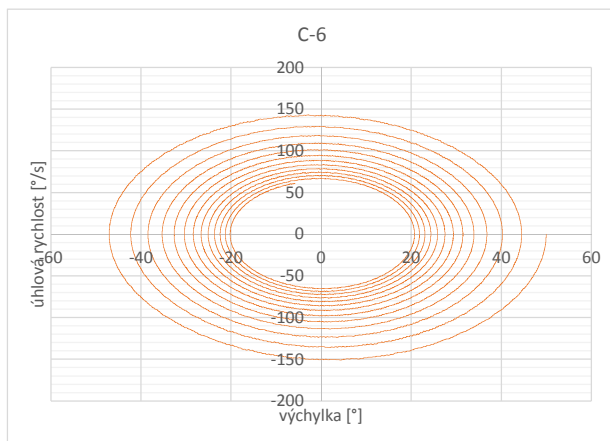
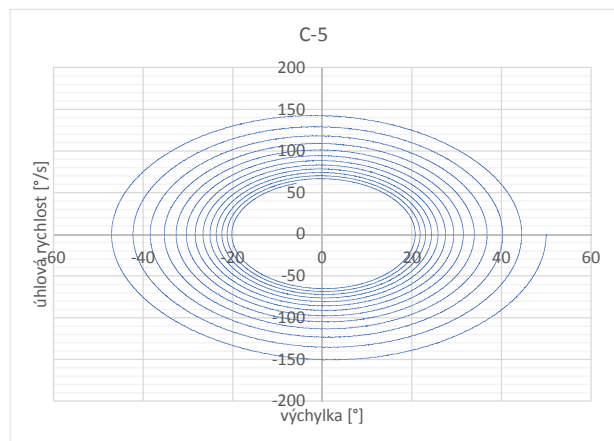
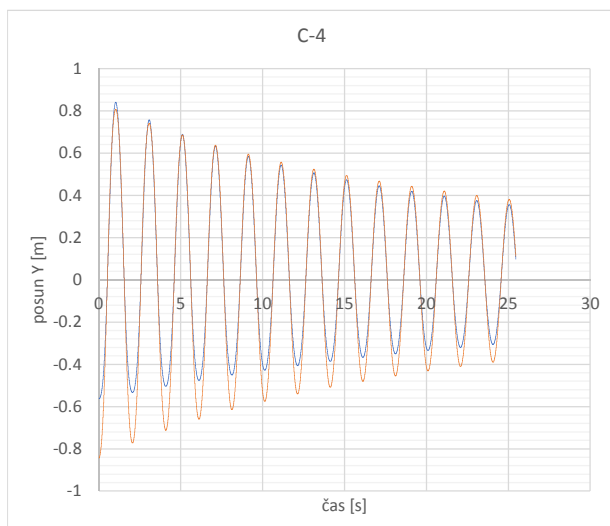
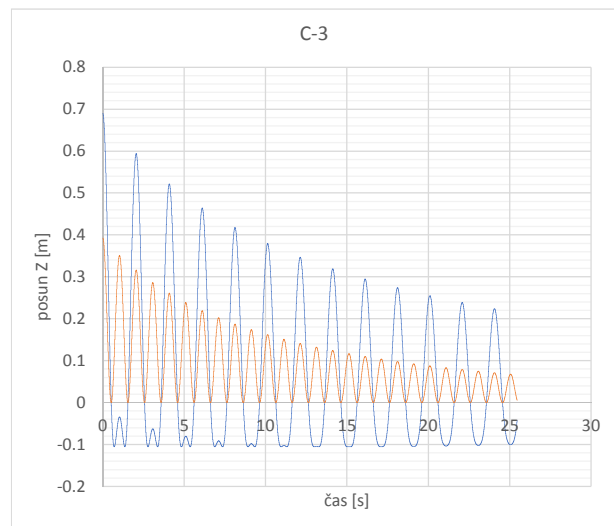
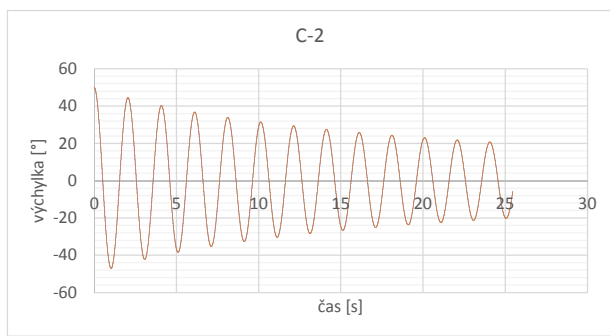
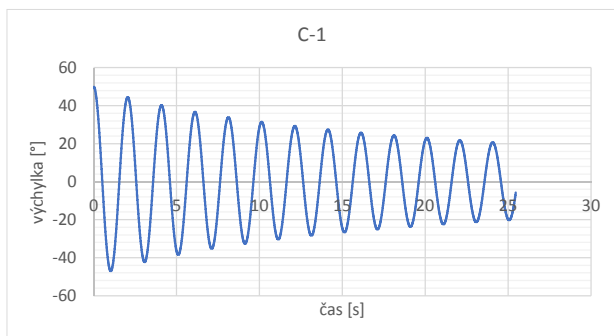
**B-3:** Svislá souřadnice  $z$  pro srdce a bod stěny zvonu v čase. Srdce má přirozeně dvojnásobnou frekvenci.

**B-4:** Vodorovná souřadnice  $y$  pro srdce a bod stěny zvonu v čase. Srdce má přirozeně dvojnásobnou frekvenci.

**B-5:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu stěny zvonu. Zde jde zřetelně poznat efekt prvního úderu srdce. Stěna zvonu se rozechvěje. Tlumící efekt srdce se projeví na vrstvách spirálové trajektorie.

**B-6:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu srdce. Výchylka je vztažená k hlavní ose kyvu zvonu. Také srdce se velmi rozechvěje po nárazu do stěny zvonu.

**B-7:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu srdce. Výchylka je vztažená k ose závěsu srdce.



### 6.1.3 Příklad C – počáteční výchylka $50^\circ$ , fixované srdce

**C-1:** Výchylka zvonu v čase. Jelikož je zvon vychýlen výrazně více než v předchozích případech, dosahuje také vyšších rychlostí, což zvýrazní efekt tlumení vyšších řádů. Tento efekt je pozorovatelný také zde.

**C-2:** Výchylka srdce a stěny zvonu v čase. Pro srdce je použita výchylka vztažená k ose závěsu srdce.

**C-3:** Svislá souřadnice  $z$  pro srdce a bod stěny zvonu v čase. Srdce má přirozeně dvojnásobnou frekvenci.

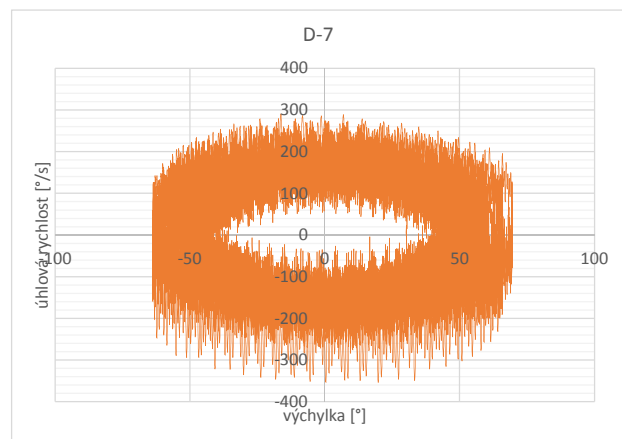
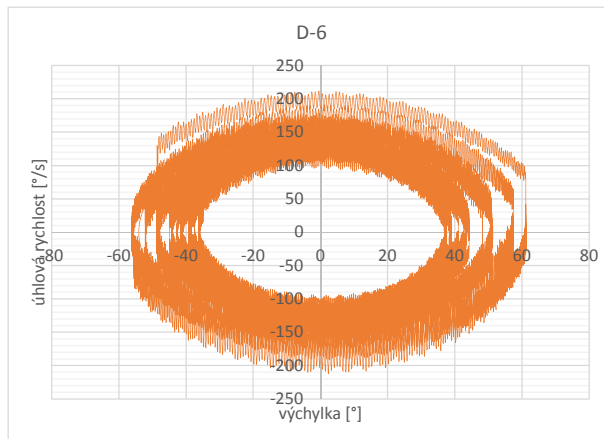
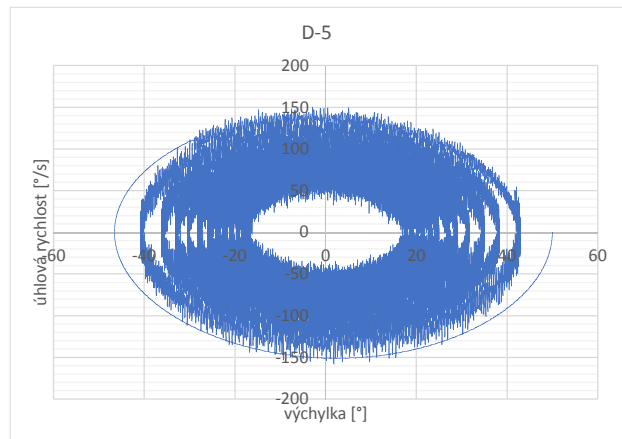
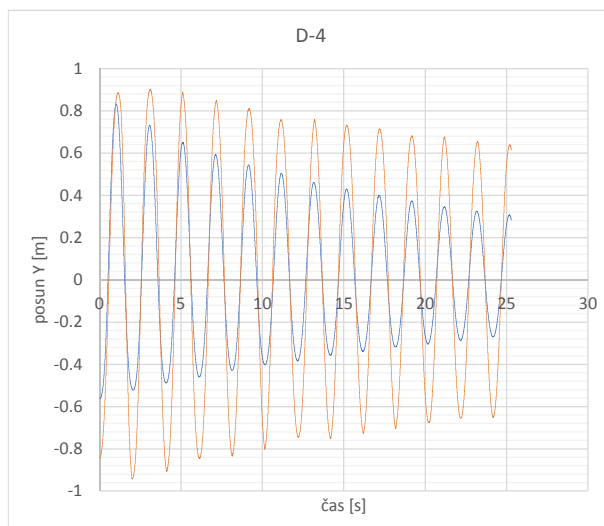
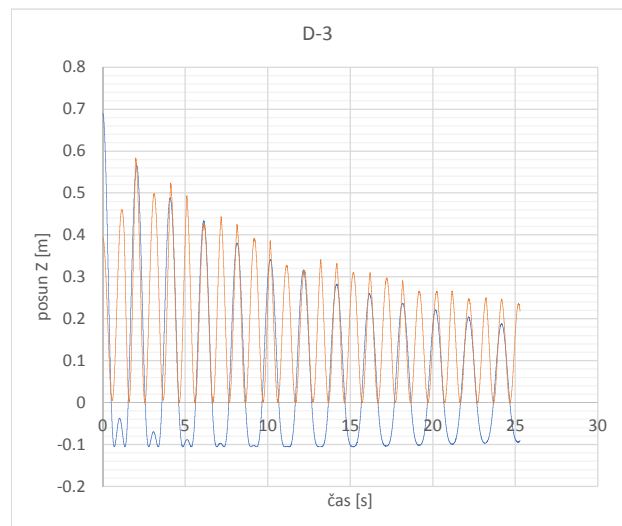
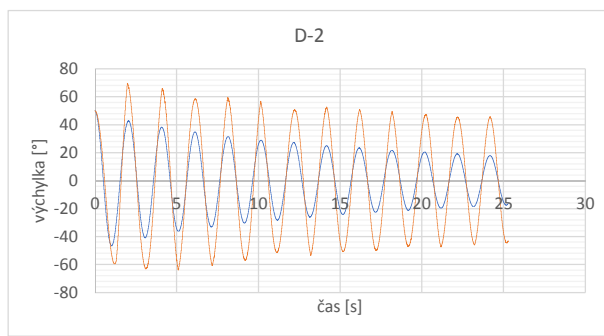
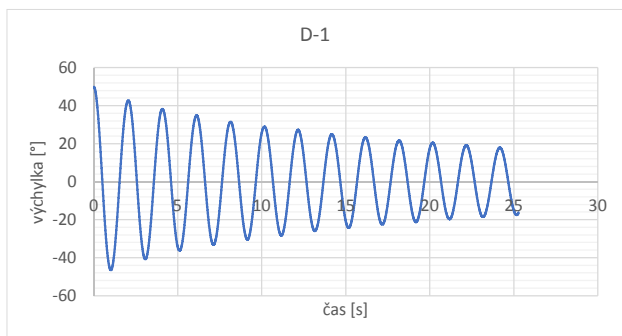
**C-4:** Vodorovná souřadnice  $y$  pro srdce a bod stěny zvonu v čase. Srdce má přirozeně dvojnásobnou frekvenci.

**C-5:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu stěny zvonu.

**C-6:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu srdce. Výchylka je vztažená k hlavní ose kyvu zvonu.

**C-7:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu srdce. Výchylka je vztažená k ose závěsu srdce. Také zde se projevují vlnky na trajektorii podobně jako v případě A-7. Lze konstatovat, že jejich tvar je mírně odlišný, přesto podobné frekvence.





### 6.1.4 Příklad D – počáteční výchylka $50^\circ$ , volné srdce

**D-1:** Výchylka zvonu v čase.

**D-2:** Výchylka srdce a stěny zvonu v čase. Pro srdce je použita výchylka vztažená k ose závěsu srdce. V tomto případě již srdce bije do zvonu pravidelně. Na tomto grafu lze vidět ostré zakončení jinak hladkých funkcí pro srdce. Důvodem je náraz a prudká změna pohybu srdce. Bystrému čtenáři jistě neunikne, že přesto některé amplitudy nejsou zakončeny nárazem. Pro vysvětlení se lze domnívat, že v případě buzení kyvu zvonu k těmto situacím nedochází. To ovšem nebylo v této části zkoumáno.

**D-3:** Svislá souřadnice  $z$  pro srdce a bod stěny zvonu v čase. Srdce má přirozeně dvojnásobnou frekvenci.

**D-4:** Vodorovná souřadnice  $y$  pro srdce a bod stěny zvonu v čase. Srdce má přirozeně dvojnásobnou frekvenci.

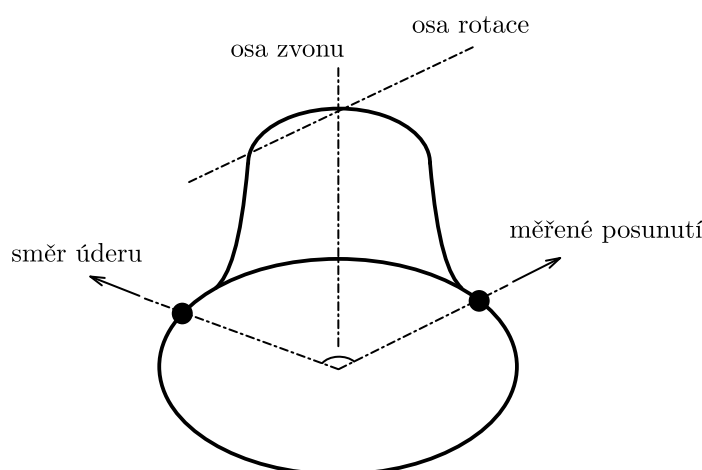
**D-5:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu stěny zvonu.

**D-6:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu srdce. Výchylka je vztažená k hlavní ose kyvu zvonu. V tomto zobrazení stojí za zmínku náhlý skok na jinak oblém eliptickém tvaru grafu. Jedná se o první úder, kdy byla výrazně změněna rychlost pohybu srdce.

**D-7:** Závislost úhlové rychlosti na výchylce bodu srdce. Výchylka je vztažená k ose závěsu srdce.

## 6.2 Emulace zvuku

Zvuk je z modelu zvonu generován prostřednictvím kmitání jednoho hmotného bodu situovaného v blízkosti okrajového prstence zvonu. Jeho poloha je zřejmá z obrázku 6.1. Snímáno je posunutí bodu kolmé na plochu zvonu. Tento bod byl vybrán z důvodu jeho kmitání kolem rovnovážné polohy, díky čemuž lze posunutí bodu přímo převést na zvukové vlny. Převod se provede pomocí násobení posunutí koeficientem, kterým se hodnoty převedou na relativní hlasitost zvuku.



Obr. 6.1: Schéma měřícího bodu pro emulaci zvuku

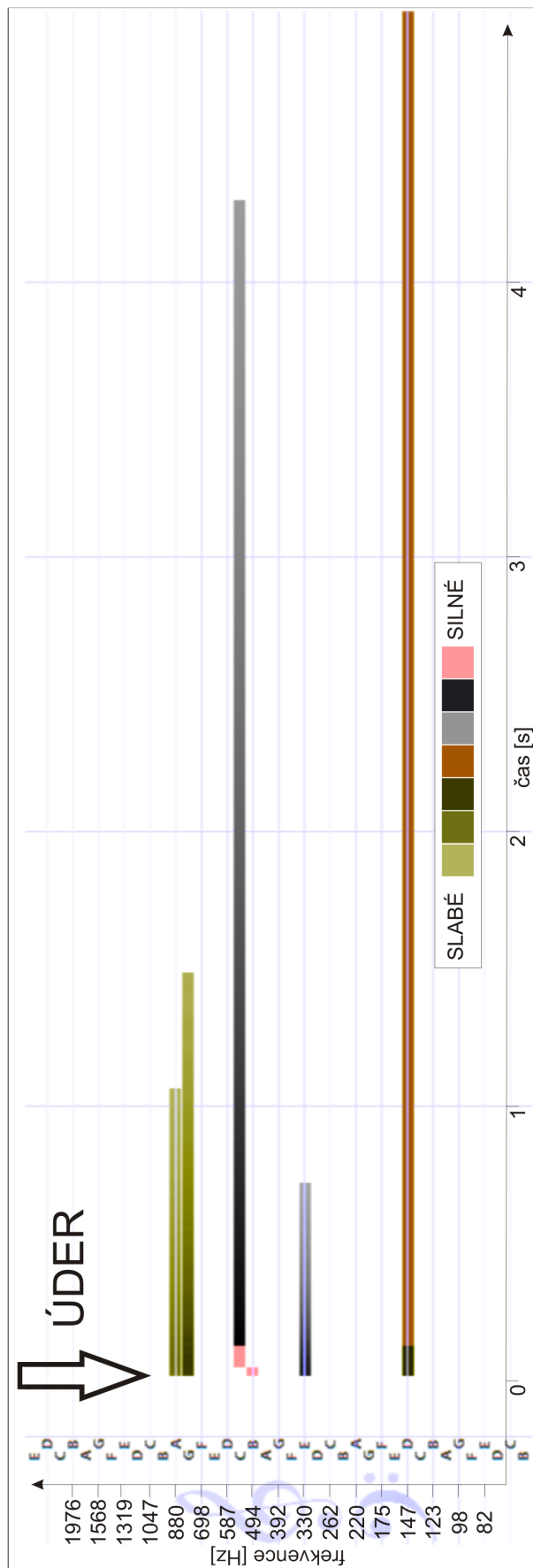
Získaná časová řada relativní hlasitosti zvuku je následně pomocí tzv. pulzně kódované modulace (PCM), viz [12], převedena do binární podoby a uložena do souboru formátu WAV. Je užita vzorkovací frekvence 40 kHz (shodná s frekvencí ukládání posunutí) při 8 bitech na jeden záznam.

Emulaci zvuku provedl doc. Frantík.

Na obrázku 6.1 je vidět frekvenční analýza zvuku, který byl emulován z modelu a vyhodnocení je zřejmé z tabulky 6.1.

Intenzita	Reálný zvon	Odpovídající z emulace	Komentář
1.	698 Hz	523 Hz	Nárazový tón
2.	175 Hz	147 Hz	Spodní oktáva, zní nejdéle
3.	1047 Hz	784 Hz	Horní kvinta
4.	1397 Hz	880 Hz	Horní oktáva
5.	392 Hz	330 Hz	Zřejmě oktáva mezi 1. a 2.

Tab. 6.1: Porovnání zvukových frekvencí



Obr. 6.2: Zjedodušená frekvenční analýza emulovaného zvuku

## 6.3 Ověření hmotnosti

Každý objekt, který byl modelován ve FyDiKu, bylo nutné zkontrolovat z hlediska odpovídající hmotnosti. Pokud je program spuštěn z příkazové řádky, vypisuje po každém úspěšném importu aktuální stav celkové hmotnosti modelu. Tohoto nástroje bylo využito a každý importovaný objekt byl následně porovnán z předpokládanou hmotností.

Hmotnost [kg]	skutečná	modelová
Zvon	703,75	704,69
Dubové jařmo	56,87	57,34
Srdce	32,77	33,09
Hnací zařízení	26,00	26,00
Rameno	7,50	7,50
Suma	826,89	828,62

Tab. 6.2: Ověření hmotnosti

## 6.4 Ověření periody kyvu

Další kritérium pro správnost je ověření délky periody kyvu zvonu. Přesněji řečeno dvojkyvu zvonu, tedy nejkratší doba, za jakou se zvon vrátí do stejné pozice.

Pohon zvonu pracuje také v závěrečné fázi cyklu působením silou opačným směrem. Důsledkem toho je, že se zvon brzdí. V určitou chvíli se pohon evidentně vypne. V tento okamžik bylo započato měření času a výsledná perioda vyplývá z naměřené doby vyděleném počtem dvojkyvů.

Co se týče určení hodnoty ze softwaru, tak zde byla perioda určena přímo rozdílem časové značky nejbližších maximálních výchylek.

Vyhodnocení se nachází v tabulce 6.3.

	Perioda dvojkyvu
Skutečný zvon	1,98 s
Numerický model	1,95 s

Tab. 6.3: Ověření periody kyvu

## ZÁVĚR

Cílem této práce bylo vytvořit prostorový numerický model zvonu v prostředí, které je založeno na principu fyzikální diskretizace a umožňuje simulaci jevů v časové oblasti. Toto prostředí nabízí software *FyDiK3D*, jehož autorem je doc. Frantík.

K tomu, aby mohl být prohlášen tento model zvonu za odpovídající skutečnosti, bylo třeba potvrdit, že v elementární úloze obdržíme výsledky, konvergující ke správnému řešení. V průběhu studia této problematiky se ukázalo, že jednotlivé dílčí postupy mohou mít silnou vzájemnou závislost, ačkoli to nebylo zprvu předpokládáno. Mluvíme zejména o tahovém namáhání spjatém s koncepcí namáhání smykového. Dokonce se ukazuje, že pro ne až tak neobvyklé podmínky vůbec nemusí existovat řešení nebo je nesmyslné. Z těchto důvodů bylo zapotřebí zvážit varianty řešení vnitřní architektury smykových pružin a vybrat to, které je nejvhodnější.

Prostorový model byl vytvořen z velké části importovacími nástroji, obsaženými v softwaru. Ověřené vztahy pro tuhosti pružin v elementárních úlohách byly implementovány do *FyDiKu* jeho autorem. Pro úplnost numerického modelu bylo zapotřebí stanovit další tuhosti pružin, jež propojují jednotlivé importované objekty.

Kompletní model však není dokonalý. Jednak jsou důvodem některá zjednodušení, kterých bylo zapotřebí podtoupit. Dále jsou to nedostatky, způsobené složitostí problému a též nelineárním vývojem studia této problematiky. Například je známo, že smykové pružiny vykazují při vrcholu zvonu vysoký poměr stran elementů, což může způsobit nedostatečné nahrazení smykové tuhosti v této oblasti tělesa. Dále podle zjištěných vztahů mezi tahový a smykovým namáháním jsou správně vyjádřeny tuhosti smykových pružin, není však zohledněn tento efekt zpětně pro tuhosti normálové. Také se ví o problému s nepřesností pro torzní pružiny, které natočeny o  $90^\circ$  nevykazují správné deformace, jak je psáno v tab. 3.6.

Přes tyto problémy však model vykazuje podobné dynamické vlastnosti, jako je přímo či nepřímo vidět z pozorování skutečného zvonu a jeho provozu. Zejména vyzdvihněme to, že se model zvonu skutečně pohybuje jako zvon reálný a dokáže simulovat ono lahodné zvonění, ačkoli zvuková emulace nevyčerpává rozlišovací schopnosti našeho sluchu. Porovnáním zjednodušených frekvenčních analýz reálného a virtuálního zvonu se ukazuje, že také v modelu najdeme podobné principy vzniku alikvotních tónů, které tvoří onu bohatost a mohutnost zvuku zvonu.

Závěrem bylo usouzeno, že pro další zdokonalování použitého softwaru je přinejmenším vhodné vytvořit speciální pružinu, která bude lépe vystihovat smykové chování. Zejména nebude omezená podmínkami použití a také nepřinese modelu nechtěné přídatné síly.



## LITERATURA

- [1] Idiofon – Wikipedie. *Idiofon – Wikipedie* [online]. poslední aktualizace 4. 10. 2017 [cit. 30. 12. 2017]. Dostupné z: <<https://cs.wikipedia.org/wiki/Idiofon>>.
- [2] Zvony | BOROKO. *Technické vybavení pro zvony / BOROKO* [online]. Copyright © 2017 Boroko [cit. 30. 12. 2017]. Dostupné z: <<http://www.boroko.cz/sluzby/zvony-technicke-vybaveni/zvony>>.
- [3] Alikvotní tón – Wikipedie. *Alikvotní tón – Wikipedie* [online]. Poslední aktualizace 27. 12. 2017 [cit. 30. 12. 2017]. Dostupné z: <[https://cs.wikipedia.org/wiki/Alikvotn%C3%AD\\_t%C3%B3n](https://cs.wikipedia.org/wiki/Alikvotn%C3%AD_t%C3%B3n)>.
- [4] Srdce, šarnýry | BOROKO. *Technické vybavení pro zvony / BOROKO* [online]. Copyright © 2017 Boroko [cit. 30. 12. 2017]. Dostupné z: <<http://www.boroko.cz/sluzby/zvony-technicke-vybaveni/srdce-zvonu-sarnyry>>.
- [5] Závěsy | BOROKO. *Technické vybavení pro zvony / BOROKO* [online]. Copyright © 2017 Boroko [cit. 30. 12. 2017]. Dostupné z: <<http://www.boroko.cz/sluzby/zvony-technicke-vybaveni/zavesy-zvonu>>.
- [6] Zvon – Wikipedie. *Zvon – Wikipedie* [online]. Poslední aktualizace 4. 10. 2017 [cit. 30. 12. 2017]. Dostupné z: <<https://cs.wikipedia.org/wiki/Zvon>>.
- [7] FRANTÍK, P. *Application FyDiK* [online]. Poslední aktualizace 19. 11. 2015 [cit. 30. 12. 2017]. Dostupné z: <<http://fydik.kitnarf.cz>>.
- [8] BAUCHAU, O. A. a J. I. CRAIG. Kirchhoff plate theory. BAUCHAU, O. A. a J. I. CRAIG, ed. *Structural Analysis* [online]. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009, 2009, s. 819-914 [cit. 30. 12. 2017]. Solid Mechanics and Its Applications. DOI: 10.1007/978-90-481-2516-6\_16. ISBN 978-90-481-2515-9. Dostupné z: <[http://www.springerlink.com/index/10.1007/978-90-481-2516-6\\_16](http://www.springerlink.com/index/10.1007/978-90-481-2516-6_16)>.
- [9] AURET, F.D. a J.A. SNYMAN. Numerical study of linear and nonlinear string vibrations by means of physical discretization. *Applied Mathematical Modelling* [online]. 1978, **2**(1), 7-17 [cit. 30. 12. 2017]. DOI: 10.1016/0307-904X(78)90030-6. ISSN 0307904x. Dostupné z: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0307904X78900306>>.
- [10] FRANTÍK, Petr. Náhrada skořepiny soustavou pružin. In: *Mezinárodní konference Modelování v mechanice: VŠB-TU Ostrava 2018*. Ostrava, 2018. V přípravě.



- [11] MACUR, Jiří. *Úvod do teorie dynamických systémů a jejich simulace*. Brno: PC-DIR, 1995. ISBN 80-214-0698-4.
- [12] Pulzně kódová modulace. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (CA): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 30. 12. 2017].

# SEZNAM PŘÍLOH

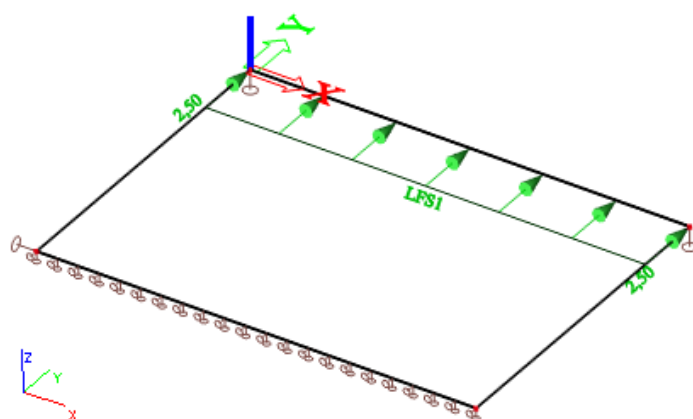
<b>A</b>	<b>Srovnávací model v softwaru Scia</b>	<b>71</b>
A.1	Tah . . . . .	71
A.2	Smyk . . . . .	72
A.3	Ohyb . . . . .	74
A.4	Kroucení . . . . .	75
<b>B</b>	<b>Import rotační plochy</b>	<b>77</b>



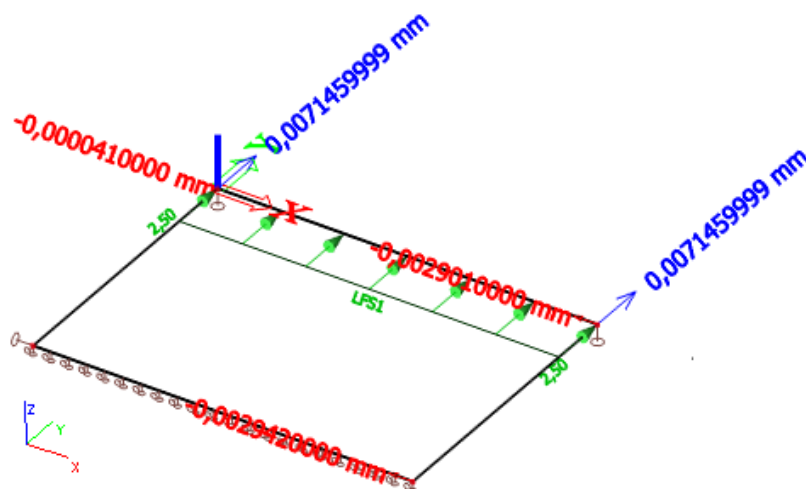
## A SROVNÁVACÍ MODEL V SOFTWARE SCIA

V této části jsou obrazové výstupy ze softwaru Scia Engineer, ve kterém byly předmětné problémy řešeny souběžně. Následně byla prováděna srovnání se softwarem FyDiK. Model je v softwaru vytvořen jako ocelová skořepina tloušťky 0,001 m o rozměrech  $0,8 \times 0,6$  m.

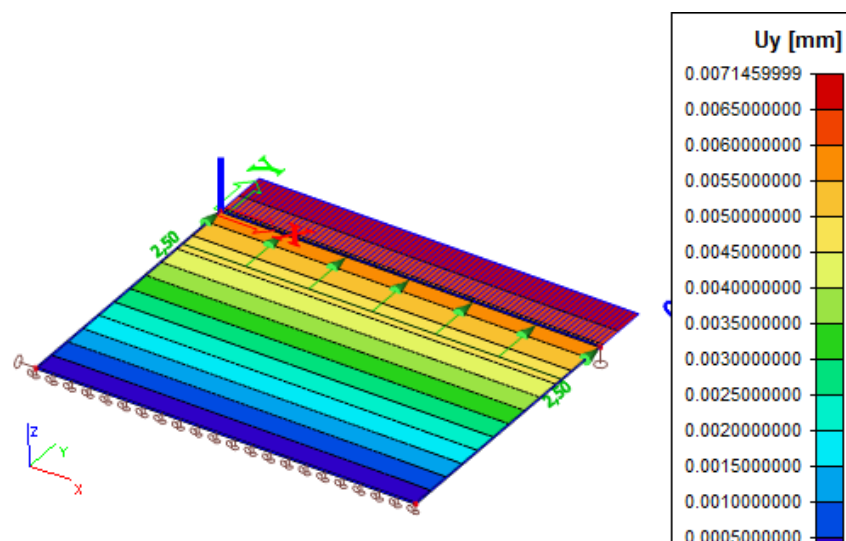
### A.1 Tah



Obr. A.1: Tah – zatížení a podpory

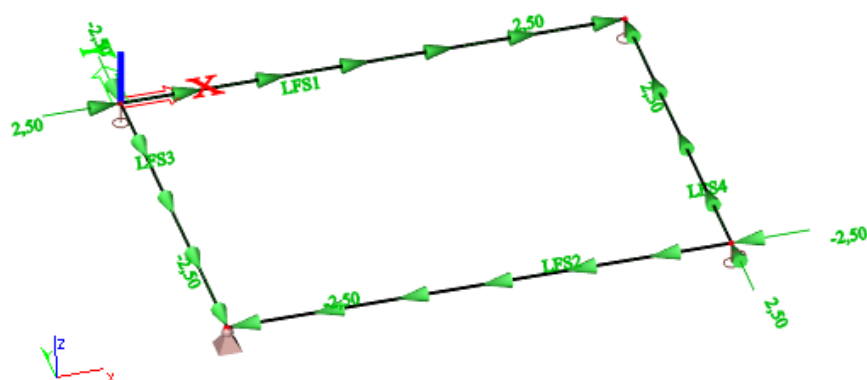


Obr. A.2: Tah – výsledné deformace

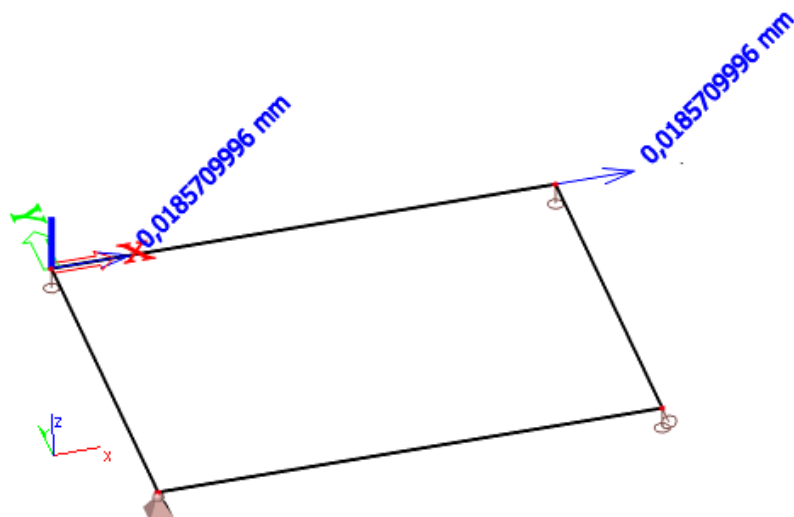


Obr. A.3: Tah – deformace konstrukce

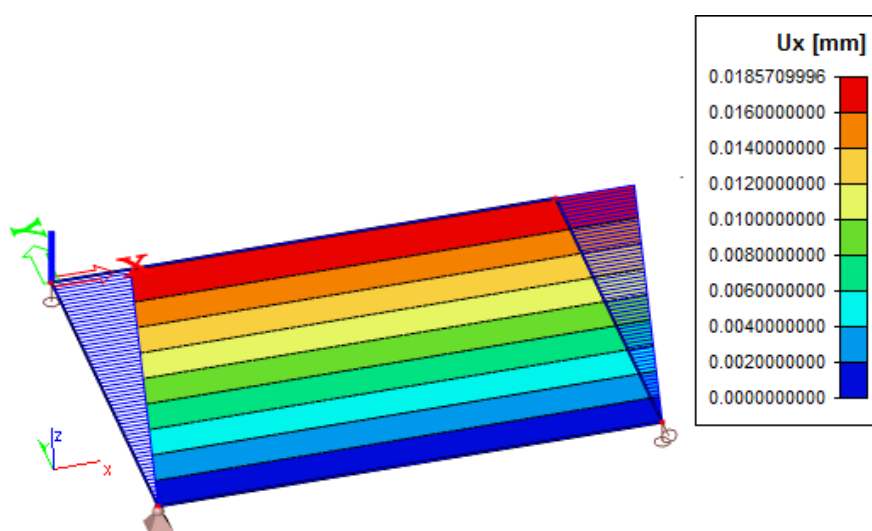
## A.2 Smyk



Obr. A.4: Smyk – zatížení a podpory

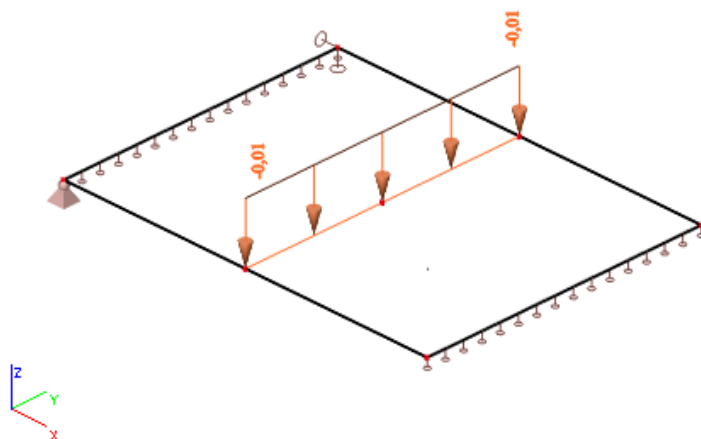


Obr. A.5: Smyk – výsledné deformace

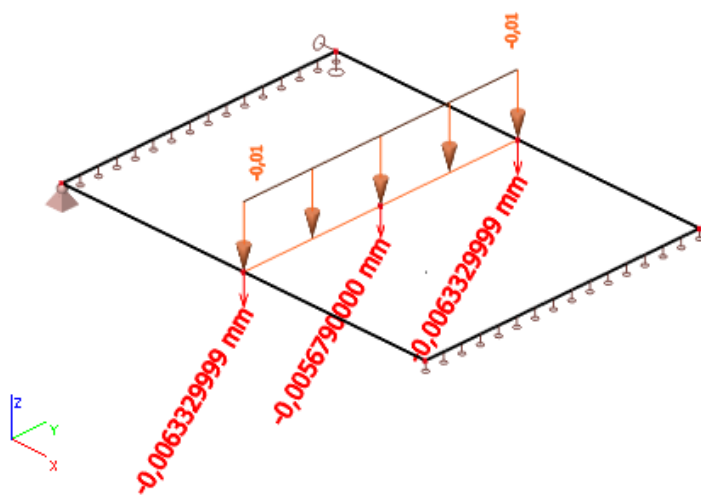


Obr. A.6: Smyk – deformace konstrukce

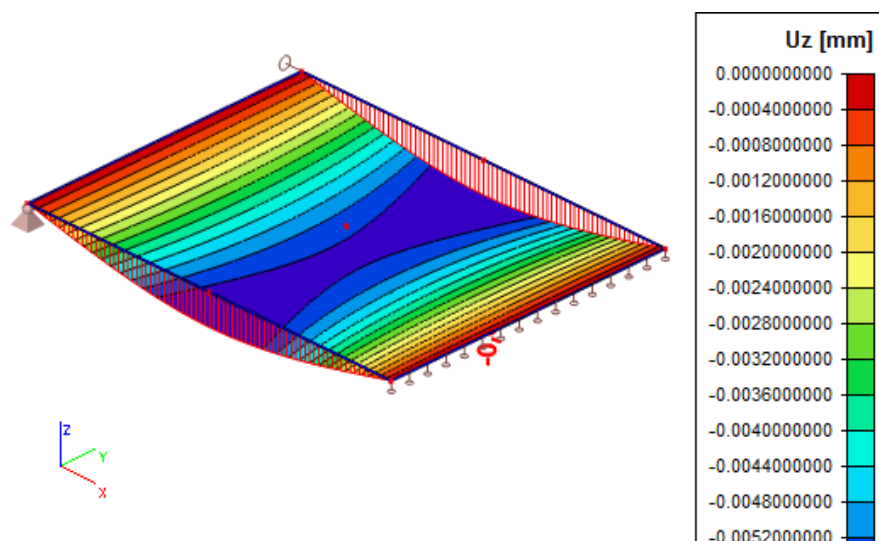
### A.3 Ohyb



Obr. A.7: Ohyb – zatížení a podpory

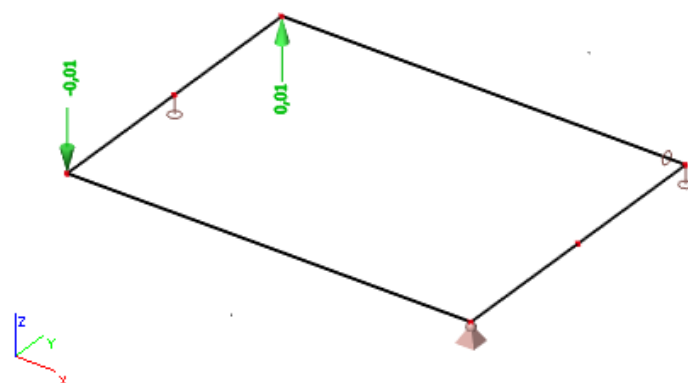


Obr. A.8: Ohyb – výsledné deformace



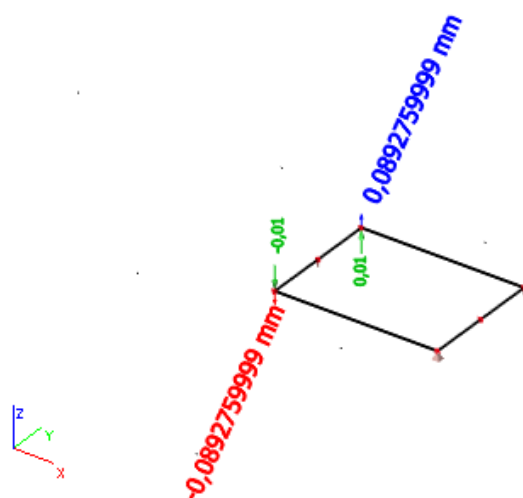
Obr. A.9: Ohyb – deformace konstrukce

## A.4 Kroucení

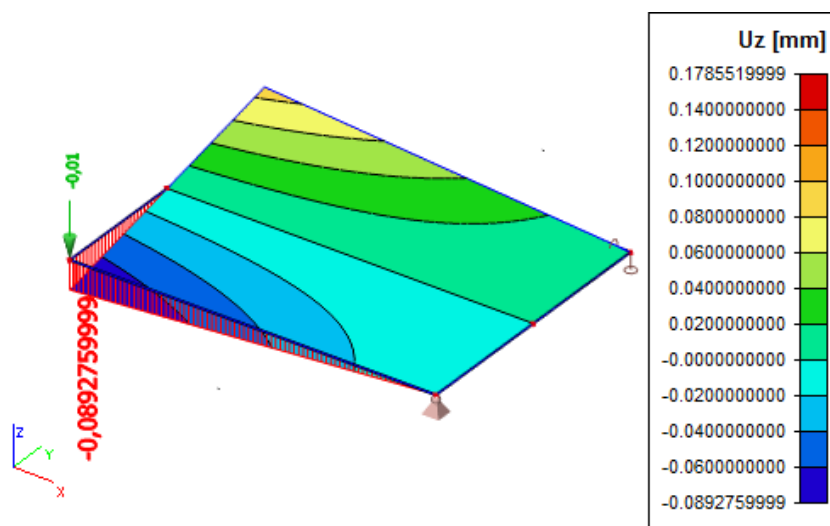


Obr. A.10: Kroucení – zatížení a podpory





Obr. A.11: Kroucení – výsledné deformace



Obr. A.12: Kroucení – deformace konstrukce

## B IMPORT ROTAČNÍ PLOCHY

Následuje obsah souboru XML sloužící pro import rotační plochy. Byl aplikován pro verzi 1.52 programu FyDiK. Čtenář jej může použít jako příklad pro vlastní experimenty. Importové soubory dalších částí modelu zvonu z kapacitních důvodů nejsou uvedeny.

```
1 <?xml version="1.0" encoding="utf-8"?>
2 <!--Header>
3   DIPLOMA THESIS, 2018
4   Author: Martin MUCKA
5   Title: Simulation of idiophonic musical instrument
6   Software: XML for FyDiK3D v1.52 http://fydik.kitnarf.cz
7   Licence: Created for public domain
8 </Header-->
9 <!------>
10 <Container package="cz.kitnarf.io.xml">
11   <!--MATERIALS-->
12   <Label package="cz.kitnarf.io.xml" name="MATERIALS" />
13   <Material package="cz.kitnarf.materials" elasticityModulus="116000000000"
14     density="8600" contractionCoefficient="0.3" />
15   <!--CROSSECTIONS-->
16   <Label package="cz.kitnarf.io.xml" name="CROSSECTIONS_BELL" />
17   <Rectangle package="cz.kitnarf.crosssection.known" height="0.001" width="1" /
18     >
19   <!--MASS POINTS-->
20   <Label package="cz.kitnarf.io.xml" name="POINTS_BELL" />
21   <MassPoint package="cz.kitnarf.fydik3dapplication" m0="0" c="0.1" x0="
22     0.0471631" y0="0" z0="-0.1857201" restraintX="true" restraintY="true"
23     restraintZ="true"/>
24   <MassPoint package="cz.kitnarf.fydik3dapplication" m0="0" c="0.1" x0="0.5445"
25     y0="0" z0="-1.0353175" restraintX="true" restraintY="true" restraintZ="
26     true"/>
27   <!--BEAMS-->
28   <Label package="cz.kitnarf.io.xml" name="BEAMS_BELL" />
29   <SplineBeam package="cz.kitnarf.fydik3dapplication.structure.beam" nodeA="
30     container[label[POINTS_BELL,0]]" nodeB="container[label[POINTS_BELL,1]]"
31     segmentCount="18" material="container[label[MATERIALS,0]]" crosssection="
32     container[label[CROSSECTIONS_BELL,0]]" x="
33     0.0693646,0.0818474,0.1022828,0.121048,0.1296943,0.1505893,0.1776303,
34     0.2212216,0.2642986,0.2717612,0.2730478,0.2761618,0.2879414,0.3036474,
35     0.3320713,0.369766,0.4231664,0.4718552" y="
36     0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0" z="
37     -0.1866186,-0.1901115,-0.1925605,-0.1965774,-0.2102583,-0.2246593,
38     -0.2289962,-0.241957,-0.2555177,-0.2619466,-0.2712044,-0.3266852,
```

```

27         -0.4451887,-0.5621225,-0.7013298,-0.8064918,-0.9022363,-0.9618804" fictive=
           "true"/>
28 <!--PLATES-->
29 <RotationalSurface package="cz.kitnarf.fydik3dapplication.structure.macro"
           type="0" beam="container[label[BEAMS_BELL,0]]" segmentCount="16"
           thicknesses="0.0498898923174373,0.0443597791559522,0.0311604138102954,
30 0.0235763907882501,0.0198359198620518,0.0197552571753339,0.021962915601023,
31 0.0225941779301281,0.0237525953370075,0.0241125694900805,0.0263059734631166,
32 0.026280420648737,0.0296992414417935,0.0353700479658909,0.044482623836259,
33 0.0544853568382144,0.0697356264657807,0.0662723364950798,0.0228407012059748"/
           >
34 </Container>

```